Exercice Métropole juin 2001. Problème partie A.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
On définit la fonction f sur $]0;+\infty[$ par: $f(x)=\ln(\sqrt{1+x}-1)$.

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de f sur $]0;+\infty[$.
3. Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans $(O,\vec{u},\vec{v})$ et A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 3.

Calculer l'ordonnée de A. Soit B le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $\frac{5}{4}$, P le projeté orthogonal de B sur l'axe $(O,\vec{u})$ et H le projeté orthogonal de B sur l'axe $(O,\vec{v})$.
Déterminer les valeurs exactes des coordonnées des points B, P et H. Placer les points A, B, P et H dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ et représenter la courbe $(\mathscr{C})$.

Correction :

1.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{1+x}-1=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x=-\infty$ donc, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{1+x}-1=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x=+\infty$ donc, $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty}$

2.

$f(x)=\ln(u(x))$ avec $u(x)=\sqrt{1+x}-1$

u est **dérivable** sur $]0;+\infty[$

$f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Pour $x\in]0;+\infty[$, $u(x)>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $u'(x)$.

$u'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}>0$

f est **strictement croissante** sur $]0;+\infty[$.

3.

$f(3)=\ln(\sqrt{4}-1)=\ln 1=0$

Donc, $A(3;0)$

$f\left(\dfrac{5}{4}\right)=\ln\left(\sqrt{\dfrac{5}{4}+1}-1\right)=\ln\left(\sqrt{\dfrac{9}{4}}-1\right)=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\ln 2$

Donc, $B\left(\dfrac{5}{4};-\ln 2\right)$

$P\left(\dfrac{5}{4};0\right)$ et $H(0;-\ln 2)$