Suites numériques.

On rappelle qu'une suite réelle est une fonction définie sur ℕ, ou sur une partie de ℕ à valeurs dans ℝ.

1. Mode de génération des suites

1.1. Formule explicite

Une suite (u_n) est donnée par **une formule explicite** lorsque son terme général u_n est donné en fonction de n.

1.2. Exemples

Exemple 1

On donne, pour tout entier naturel n, $u_n = \sqrt{n}$. Calculer u_{16}.

$u_{16} = \sqrt{16} = 4$.

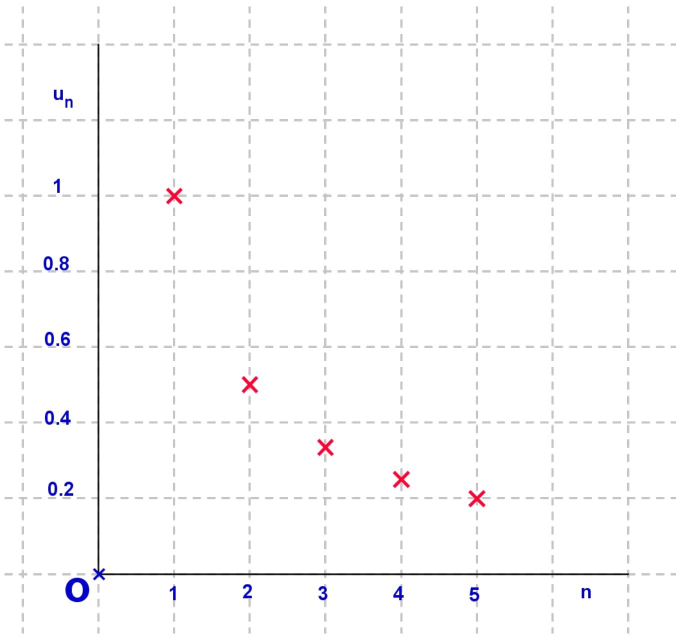
Exemple 2

On donne, pour tout entier naturel n, $u_n = n^2 + 2 \times n + 1$. Calculer u_{10}.

$u_{10} = 10^2 + 2 \times 10 + 1 = 121$

Remarque

Dans un repère, une suite donnée par une formule explicite peut être représentée par les points de coordonnées $(n; u_n)$.



2. Relation de récurrence

2.1. Définition

Une suite (u_n) est donnée par **une relation de récurrence** lorsque, par exemple, le terme u_{n+1} est donné en fonction de u_n.
(il faut alors connaître le premier terme de la suite).

2.2. Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=-3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=-2u_n+3$. Calculer u_5.

A la calculatrice, on entre -3 puis EXE ou ENTER. On saisit ensuite − 2ANS+3, puis en appuyant sur EXE ou ENTER plusieurs fois, on obtient successivement $u_1, u_2, \ldots$ et enfin $u_5=129$.

2.3. Remarque

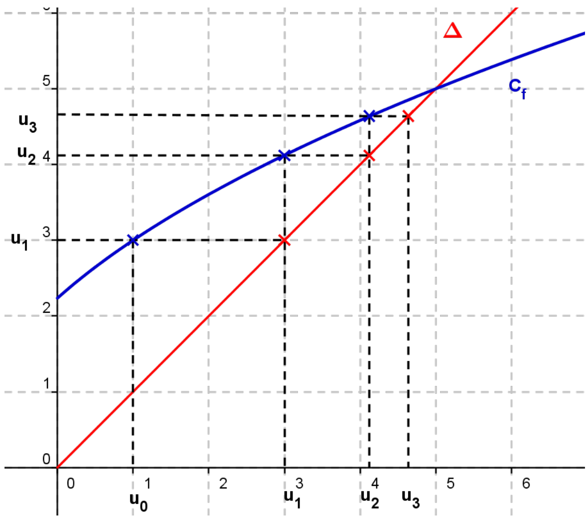
Dans un repère, une suite donnée par son premier terme et une relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$, où f est une fonction peut être représentée à l'aide de la courbe de f et de la droite Δ d'équation $y=x$.

On place le premier terme (par exemple u_0) sur l'axe des abscisses, la courbe de f permet de déterminer le terme suivant (u_1) sur l'axe des ordonnées, et la droite Δ permet de placer ce terme sur l'axe des abscisses, et ainsi de suite.

Exemple

La suite (u_n) définie par $u_0=1$, et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\sqrt{4u_n+5}$.

On utilise la courbe de la fonction f définie sur $\left[-\frac{5}{4};+\infty\right[$ par $f(x)=\sqrt{4x+5}$.



3. Suites arithmétiques, suites géométriques

Suite (u_n) $n \in \mathbb{N}$	Suite **arithmétique** de raison r	Suite **géométrique** de raison q
Définition	On passe de chaque terme au suivant en ajoutant le même réel r : pour tout entier n, $u_{n+1}=u_n+r$.	On passe de chaque terme au suivant en multipliant par le même réel q : pour tout entier n , $u_{n+1}=q\times u_n$.
Terme général	Pour tous entiers n et p , $u_n=u_0+nr$ $u_n=u_1+(n-1)r$ $u_n=u_p+(n-p)\times r$	Pour tous entiers n et p , $u_n=u_0\times q^n$ $u_n=u_1\times q^{n-1}$ $u_n=u_p\times q^{n-p}$
Somme de termes consécutifs	$\text{Nb de termes}\times\dfrac{1^{\text{er}}\text{ terme}+\text{dernier terme}}{2}$ $\sum_{k=0}^{n} u_k=(n+1)\times\dfrac{u_0+u_n}{2}$	$\text{Premier terme}\times\dfrac{1-q^{\text{nb de termes}}}{1-q}$ $\sum_{k=0}^{n} u_k=u_0\times\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ Attention, $q\neq 1$
Cas particuliers	$1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$	$1+q+q^2+\ldots+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ Attention, $q\neq 1$

4. Le raisonnement par récurrence

4.1. Exemple préparatoire

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0= & -3 \\ u_{n+1}= & \dfrac{1}{u_n+1} \end{cases}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$

En calculant $u_1=-\dfrac{1}{2}$, $u_2=2$, $u_3=\dfrac{1}{3}$, on peut conjecturer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $u_n>0$.

4.2. Principe de récurrence

a) Proposition

p est un entier naturel fixé. On considère une propriété de l'entier naturel n si :

- La propriété est vraie pour $n=p$ (initialisation)
- La propriété est héréditaire pour tout entier naturel supérieur ou égal à p , c'est à dire : on suppose que la propriété est vraie pour n fixé supérieur ou égal à p et on démontre que la propriété est vraie pour $n+1$.
- Alors, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p la propriété est vraie.

b) Remarques

Pour utiliser le principe de récurrence, il faut connaître la propriété de l'entier naturel n . (soit la propriété est donnée dans l'énoncé soit on effectue une conjecture.

Il existe des propriétés qui soient héréditaires pour tout entier naturel et qui sont fausses pour tout entier naturel.

4.3. Exemples

a) On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n+1} \end{cases}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Montrons par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $u_n > 0$.

– La propriété est vraie au rang 2. En effet, $u_2 = 2$ donc $u_2 > 0$.

– On suppose que, pour un entier n fixé, $u_n > 0$.

– Montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$: montrons que $u_{n+1} > 0$.

On sait que $u_n > 0$ et que $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n+1}$.

Or $u_n > 0$ entraîne $u_n + 1 > 0$ puis $\dfrac{1}{u_n+1} > 0$, soit $u_{n+1} > 0$.

L'hérédité est ainsi prouvée.

On a bien que $\forall n > 2$, $u_n > 0$.

b) a est un nombre réel strictement positif fixé. Démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel non nul $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

– La propriété est vraie au rang 1. En effet, $(1+a)^1 = 1+a$ et $1+1\times a = 1+a$ donc $(1+a)^1 \geqslant 1+1\times a$

– On suppose que, pour un entier n fixé, $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

– Montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$: montrons que $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$.

On sait que :

$$\begin{cases}(1+a)^n \geqslant 1+na \\ 1+a > 0\end{cases} \Leftrightarrow (1+a)^n \times (1+a) \geqslant (1+na) \times (1+a) \Leftrightarrow (1+a)^{n+1} \geqslant 1+na+a+na^2$$

$\Leftrightarrow (1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a+na^2$.

Or, $na^2 > 0$ donc $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$

L'hérédité est ainsi prouvée.

On a bien, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel non nul $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

5. Sens de variation des suites

5.1. Définition

Soit (u_n) une suite réelle.

- (u_n) est **croissante** lorsque, pour tout entier n , $u_{n+1} \geq u_n$.
- (u_n) est **décroissante** lorsque, pour tout entier n , $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- (u_n) est **constante** (ou **stationnaire**) lorsque, pour tout entier n , $u_{n+1} = u_n$.

5.2. Étude des variations d'une suite

a) *Signe de* $u_{n+1} - u_n$

Proposition :

- Si, pour tout entier n , $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, alors (u_n) est **croissante**.
- Si, pour tout entier n , $u_{n+1} - u_n \leq 0$,alors (u_n) est **décroissante**.
- Si, pour tout entier n , $u_{n+1} - u_n = 0$,alors (u_n) est **constante**.

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2} + 2 , \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Pour justifier que cette suite est bien définie, c'est à dire que pour tout entier naturel n , $u_n \neq 0$, il suffit, en effectuant un raisonnement par récurrence, de démontrer que pour tout entier naturel n $u_n > 0$ (ou $u_n \geqslant 1$).

Pour tout n , $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n^2} + 2 > 0$

donc $u_{n+1} - u_n > 0$, et la suite (u_n) est croissante.

b) *Cas des suites à termes strictement positifs*

<u>Proposition :</u> Soit (u_n) une suite dont les termes sont strictement positifs.

- Si, pour tout entier n, $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$, alors (u_n) est **(strictement) croissante**.
- Si, pour tout entier n, $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$,alors (u_n) est **(strictement) décroissante**.
- Si, pour tout entier n, $\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$,alors (u_n) est **constante**.

Exemple : Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=\frac{u_n}{u_n^2+1} \end{cases}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

On admet que pour tout n, $u_n>0$.

Pour tout entier n, $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{u_n^2+1}$, donc $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$ et la suite (u_n) est décroissante.

c) *Cas des suites données par une formule explicite*

<u>Proposition :</u> Soit (u_n) une suite définie par $u_n=f(n)$ où f est une fonction définie sur $[0;+\infty[$.

- Si f est croissante sur $[0;+\infty[$, alors (u_n) est **croissante**.
- Si f est décroissante sur $[0;+\infty[$, alors (u_n) est **décroissante**.

Exemple : Soit la suite (u_n) définie par $u_n=2n^2-12n+19$. On a $u_n=f(n)$ avec $f(x)=2x^2-12x+19$, définie sur $[0;+\infty[$.

f est la restriction d'une fonction trinôme du second degré, et présente un minimum (puisque le coefficient du terme de degré 2 est 2>0) en $-\frac{b}{2a}=-\frac{-12}{2\times 2}=3$

On en déduit que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 3.

6. Suites minorées, majorées, bornées

6.1. Définition

(u_n) est définie sur ℕ. On dit que :

- (u_n) est **minorée** s'il existe un nombre réel m tel que pour tout entier n on ait $m \leqslant u_n$. On dit alors que m est un **minorant** de la suite (u_n).
- (u_n) est **majorée** s'il existe un nombre réel M tel que pour tout entier n on ait $u_n \leq M$. On dit alors que M est un **majorant** de la suite (u_n).
- (u_n) est **bornée** si elle est majorée et minorée.

6.2. Remarques

Si m est un minorant de (u_n) alors tout nombre réel inférieur à m est aussi un minorant de (u_n).
Si M est un majorant de (u_n) alors tout nombre réelsupérieur à M est aussi un majorant de (u_n).

6.3. Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=0$ et pour tout n de ℕ, $u_{n+1}=\dfrac{1}{u_n^2+1}$. Montrer que la suite (u_n) est bornée.

$$u_0=0\ ;\ u_1=\frac{1}{0^2+1}=1\ ;\ u_2=\frac{1}{1^2+1}=\frac{1}{2}\ ;\ u_3=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}=\frac{1}{\frac{5}{4}}=\frac{4}{5}\ ;\ u_4=\frac{1}{\frac{16}{25}+1}=\frac{1}{\frac{41}{25}}=\frac{25}{41}.$$

On fait les conjectures suivantes :
La suite n'est pas monotone.
Tous les termes de la suite sont positifs ou nuls.
1 est un majorant de la suite.
Démontrons en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

– La propriété est vraie au rang 0. En effet, $u_0=0$ donc $0 \leq u_0 \leq 1$.
– On suppose que, pour un entier n fixé, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
– Montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$: montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
On sait que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$; la fonction carrée est croissante sur $[0;+\infty[$ donc $0^2 \leqslant u_n^2 \leqslant 1^2$ soit $0 \leqslant u_n^2 \leqslant 1$
Et, $1 \leqslant u_n^2+1 \leqslant 2$.

La fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$, donc $\dfrac{1}{1} \geqslant \dfrac{1}{u_n^2+1} \geqslant \dfrac{1}{2}$, soit $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{u_n^2+1} \leqslant 1$

Donc, $0 \leqslant \frac{1}{u_n^2+1} \leqslant 1$, soit $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

L'hérédité est ainsi prouvée.

On a bien pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

La suite (u_n) est bornée.

