

**Exercice**      **Sens de variation des suites**

Étudier le sens de variation de chacune des suites :

1.  $u_n = n^2 - 2n, \forall n \in \mathbb{N}$

2.  $u_n = (-1)^n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$

3.  $u_n = -2^n + 3, \forall n \in \mathbb{N}$

4.  $u_n = \left(-\frac{5}{3}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$

5.  $u_n = \frac{n^3}{3^n}, \forall n \in \mathbb{N}$

6.  $u_n = \left(\frac{1}{11}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$

7. 
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{4}{3} + u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

8. 
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{4}{3} u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

**Correction :**

$$\begin{aligned} 1. & u_{n+1} - u_n \\ &= (n+1)^2 - 2(n+1) - n^2 + 2n \\ &= n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 - n^2 + 2n \\ &= 2n - 1 \end{aligned}$$

Or, pour  $n \geq 1$ ,  $2n-1 > 0$

Donc, la suite  $(u_n)$  est **croissante à partir de  $n=1$**

Remarque:  $u_0=0$   $u_1=-1$   $u_2=0$   $(u_n)$  n'est pas croissante sur  $\mathbb{N}$ .

$$2. u_0 = 1 + 1 = 2$$

$$u_1 = -1 + 1 = 0$$

$$u_2 = 1 + 1 = 2$$

$$u_3 = -1 + 1 = 0$$

etc....

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n = 2 \text{ si } n \text{ est pair} \\ u_n = 0 \text{ si } n \text{ est impair} \end{array} \right.$$

$(u_n)$  n'est **ni croissante, ni décroissante.**

$$3. u_{n+1} - u_n$$

$$= -2^{n+1} + 3 + 2^n - 3$$

$$= 2^n(1 - 2)$$

$$= -2^n$$

Or  $-2^n < 0$

Donc, la suite  $(u_n)$  est **décroissante.**

$$4. u_n = \left(-\frac{5}{3}\right)^n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n > 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ u_n < 0 \text{ si } n \text{ est impair} \end{array} \right.$$

$(u_n)$  n'est **ni croissante, ni décroissante.**

$$5. u_n = \frac{n^3}{3^n}$$

$$u_0 = 0$$

$$u_1 = \frac{1}{3}$$

$$u_2 = \frac{8}{9}$$

$$u_3 = \frac{27}{27} = 1$$

$$u_4 = \frac{64}{81} < 1$$

$(u_n)$  n'est **ni croissante, ni décroissante.**

6.  $u_n = \left(\frac{1}{11}\right)^n$

La suite  $(u_n)$  est une suite dont **les termes sont strictement positifs**.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{11}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

Donc la suite  $(u_n)$  est **décroissante**.

7.  $u_{n+1} - u_n = \frac{4}{3}$

Or,  $\frac{4}{3} > 0$

Donc, la suite  $(u_n)$  est **croissante**.

8. La suite  $(u_n)$  est une suite dont **les termes sont strictement positifs**. (car  $u_0 = 5$ )

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4}{3}$$

Or  $\frac{4}{3} > 1$

Donc, la suite  $(u_n)$  est **croissante**.