Exercice

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+4$.

Soit (v_n) une suite définie pour tout entier naturel n par: $v_n=8-u_n$.
1. Calculer u_1, u_2, u_3 puis v_1, v_2, v_3.
2. Montrer que (v_n) est une suite géometrique et préciser sa raison.
3. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

Correction :

1. $\boxed{u_1=\frac{1}{2}u_0+4=\frac{1}{2}\times 3+4=\frac{11}{2}}$

$\boxed{u_2=\frac{1}{2}u_1+4=\frac{11}{4}+4=\frac{27}{4}}$

$\boxed{u_3=\frac{1}{2}u_2+4=\frac{27}{8}+4\,5=\frac{59}{8}}$

$\boxed{v_1=8-u_1=8-\frac{11}{2}=\frac{5}{2}}$

$\boxed{v_2=8-u_2=8-\frac{27}{4}=\frac{5}{4}}$

$\boxed{v_3=8-u_3=8-\frac{59}{8}=\frac{5}{8}}$

2. $v_{n+1}=8-u_{n+1}$

$v_{n+1}=8-\frac{1}{2}u_n-4$

$v_{n+1}=4-\frac{1}{2}u_n$

$v_{n+1}=\frac{1}{2}(8-u_n)$

$v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$

La suite (v_n) est **une suite géométrique** de **raison** $\boxed{\frac{1}{2}}$.

3. $v_n=v_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$v_n=5\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Or, $u_n=8-v_n$

$\boxed{u_n=8-5\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$