Exercice

La suite (u_n) est définie par $u_0=2$ et, pour tout n de ℕ, $u_{n+1}=\frac{5u_n-1}{u_n+3}$.

On admet que, pour tout entier naturel n , $u_n\neq 1$, et on pose $v_n=\frac{1}{u_n-1}$.

1. Calculer u_1 , u_2 , u_3 puis v_1 , v_2 , v_3 .
2. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique. On précisera sa raison et son premier terme.
3. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .

Correction :

1. $\boxed{u_1=\dfrac{5\times 2-1}{2+3}=\dfrac{9}{5}}$

$\boxed{u_2=\dfrac{9-1}{\dfrac{9}{5}+3}=\dfrac{8}{\dfrac{24}{5}}=\dfrac{40}{24}=\dfrac{5}{3}}$

$\boxed{u_3=\dfrac{\dfrac{25}{3}-1}{\dfrac{5}{3}+3}=\dfrac{\dfrac{22}{3}}{\dfrac{14}{3}}=\dfrac{22}{14}=\dfrac{11}{7}}$

$\boxed{v_1=\dfrac{1}{\dfrac{9}{5}-1}=\dfrac{1}{\dfrac{4}{5}}=\dfrac{5}{4}}$

$\boxed{v_2=\dfrac{1}{\dfrac{5}{3}-1}=\dfrac{1}{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{3}{2}}$

$\boxed{v_3=\dfrac{1}{\dfrac{11}{7}-1}=\dfrac{1}{\dfrac{4}{7}}=\dfrac{7}{4}}$

2. $v_{n+1}=\dfrac{1}{u_{n+1}-1}$

$$v_{n+1}=\frac{1}{\dfrac{5u_n-1}{u_n+3}-1}$$

$$v_{n+1}=\frac{u_n+3}{5u_n-1-u_n-3}$$

$$v_{n+1}=\frac{u_n+3}{4u_n-4}$$

$$v_n+\frac{1}{4}=\frac{1}{u_n-1}+\frac{1}{4}$$

$$v_n+\frac{1}{4}=\frac{4+u_n-1}{4u_n-4}$$

$$v_n+\frac{1}{4}=\frac{u_n+3}{4u_n-4}$$

Donc, $v_{n+1}=v_n+\dfrac{1}{4}$

(v_n) est **la suite arithmétique** de **raison** $\boxed{\dfrac{1}{4}}$ et de **premier terme** $\boxed{v_0=1}$.

3. $v_n = v_o + \frac{1}{4} n$

$v_n = 1 + \frac{1}{4} n = \frac{4+n}{4}$

Or, $u_n = \frac{1}{v_n} + 1$

$u_n = \frac{4}{4+n} + 1$

$\boxed{u_n = \frac{8+n}{4+n}}$