Exercice

La suite (u_n) est définie par $u_0=2$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{5u_n-3}{u_n+1}$.

On admet que, pour tout entier naturel n , $u_n\neq 1$, et on pose $v_n=\dfrac{u_n-3}{u_n-1}$.

1. Calculer u_1 , u_2 , u_3 puis v_1 , v_2 , v_3 .
2. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme.
3. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .

Correction :

1. $\boxed{u_1=\dfrac{5\times2-3}{2+1}=\dfrac{7}{3}}$

$$\boxed{u_2=\dfrac{\dfrac{35}{3}-3}{\dfrac{7}{3}+1}=\dfrac{\dfrac{26}{3}}{\dfrac{10}{3}}=\dfrac{26}{10}=\dfrac{13}{5}}$$

$$\boxed{u_3=\dfrac{13-3}{\dfrac{13}{5}+1}=\dfrac{10}{\dfrac{18}{5}}=\dfrac{50}{18}=\dfrac{25}{9}}$$

$$\boxed{v_1=\dfrac{\dfrac{7}{3}-3}{\dfrac{7}{3}-1}=\dfrac{-\dfrac{2}{3}}{\dfrac{4}{3}}=-\dfrac{2}{4}=-\dfrac{1}{2}}$$

$$\boxed{v_2=\dfrac{\dfrac{13}{5}-3}{\dfrac{13}{5}-1}=\dfrac{\dfrac{-2}{5}}{\dfrac{8}{5}}=\dfrac{-2}{8}=-\dfrac{1}{4}}$$

$$\boxed{v_3=\dfrac{\dfrac{25}{9}-3}{\dfrac{25}{9}-1}=\dfrac{-\dfrac{2}{9}}{\dfrac{16}{9}}=-\dfrac{2}{16}=-\dfrac{1}{8}}$$

2. $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}-1}$

$$v_{n+1}=\dfrac{\dfrac{5u_n-3}{u_n+1}-3}{\dfrac{5u_n-3}{u_n+1}-1}$$

$$v_{n+1}=\dfrac{5u_n-3-3u_n-3}{5u_n-3-u_n-1}$$

$$v_{n+1}=\dfrac{2u_n-6}{4u_n-4}$$

$$v_{n+1}=\dfrac{2(u_n-3)}{4(u_n-1)}$$

$$v_{n+1}=\dfrac{1}{2}\dfrac{u_n-3}{u_n-1}$$

$$v_{n+1}=\dfrac{1}{2}v_n$$

(v_n) est **la suite géométrique** de **raison** $\boxed{\dfrac{1}{2}}$ et de **premier terme** $\boxed{v_0=-1}$.

3. $v_n = -1\times\left(\frac{1}{2}\right)^n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Or,

$u_n v_n - v_n = u_n - 3$

$u_n(v_n - 1) = v_n - 3$

$u_n = \dfrac{v_n - 3}{v_n - 1}$

D'où, $\boxed{u_n = \dfrac{-\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3}{-\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} = \dfrac{1 + 3\times 2^n}{1 + 2^n}}$