Exercice Sens de variation des suites

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{2n+1}$. Démontrer que cette suite est croissante :

1. en étudiant la différence $u_{n+1} - u_n$;
2. en étudiant le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$;
3. en étudiant la fonction $f\ :\ x \rightarrow \sqrt{2x+1}$

Correction :

1. $u_{n+1}-u_n$

$=\sqrt{2(n+1)+1}-\sqrt{2n+1}$

$=\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1}$

La fonction $g(x)=\sqrt{x}$ définie sur $]0;+\infty[$ est strictement croissante.

2n+3>2n+1

$\sqrt{2n+3}>\sqrt{2n+1}$

Donc: $\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1}>0$

Donc, la suite (u_n) est **croissante**.

2. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+1}}=\sqrt{\dfrac{2n+3}{2n+1}}$

$\dfrac{2n+3}{2n+1}>1$

La fonction $g(x)=\sqrt{x}$ définie sur $]0;+\infty[$ est strictement croissante.

$\sqrt{\dfrac{2n+3}{2n+1}}>\sqrt{1}$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$

Donc, la suite (u_n) est **croissante**.

3.
$f(x)=\sqrt{2x+1}$ est définie et dérivable sur $[0;+\infty[$

Pour tout x de $[0;+\infty[$ $f'(x)=2\times\dfrac{1}{2\sqrt{2x+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}>0$

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$

f est croissante sur $[0;+\infty[$, or $u_n=f(n)$ donc la suite (u_n) est **croissante**.

