Exercice Raisonnement par récurrence

Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Correction :

✔ Au rang n=1

$$\frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6}=\frac{1\times2\times3}{6}=1$$

La propriété est vraie au rang 1.

✔ On suppose que la propriété est vraie au rang n. Montrons qu'elle est vraie au rang n+1

$1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)(n+1)}{6}$$

$$=\frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}$$

$$=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$2n^2+7n+6=0$

$\Delta=7^2-4\times2\times6=49-48=1$

$n_1=\frac{-7-1}{4}=-2$ et $n_2=\frac{-7+1}{4}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$

Donc: $2n^2+7n+6=2(n+2)\left(n+\frac{3}{2}\right)=(n+2)(2n+3)$

$1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2$

$$=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

La propriété est donc vraie au rang n+1.

✔ L'hérédité a été prouvée. D'après le principe de récurrence:

$$\forall n\in\mathbb{N},\ 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$