Exercice raisonnement par récurrence

Soit la suite (u_n) définie par $u_0=5$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1}=\sqrt{2u_n-1}$.
Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, $1 \leqslant u_n \leqslant 3$.

Correction :

- ✔ Au rang n=1

  $u_1=\sqrt{2u_0-1}=\sqrt{10-1}=\sqrt{9}=3$

  Donc $1\leqslant u_1\leqslant 3$

  La propriété est vraie au rang 1.

- ✔ On suppose que la propriété est vraie au rang n. Montrons qu'elle est vraie au rang n+1

  $1\leqslant u_n\leqslant 3$

  $1\times 2\leqslant 2u_n\leqslant 3\times 2$

  $2\leqslant 2u_n\leqslant 6$

  $2-1\leqslant 2u_n-1\leqslant 6-1$

  $1\leqslant 2u_n-1\leqslant 5$

  La fonction $x\longmapsto\sqrt{x}$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, donc:

  $\sqrt{1}\leqslant\sqrt{2u_n-1}\leqslant\sqrt{5}$

  Or $\sqrt{1}=1$ et $\sqrt{5}\approx 2{,}2$

  Donc: $1\leqslant\sqrt{2u_n-1}\leqslant 3$

  C'est à dire: $1\leqslant u_{n+1}\leqslant 3$

  La propriété est donc vraie au rang n+1.

- ✔ L'hérédité a été prouvée. **D'après le principe de récurrence**:

  Pour tout $n\geqslant 1$, $\boxed{1\leqslant u_n\leqslant 3}$