Exercice raisonnement par récurrence

Soit la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et, pour tout $n\geqslant 0$, u_{n+1}= $-\frac{u_n^2}{3}+2$.

Démontrer par récurrence que, pour tout $n\geqslant 1$, $0\leqslant u_n\leqslant 2$.

Correction :

✔ Au rang n=1

$u_1=-\frac{u_0^2}{3}+2=2$

Donc, $1\leqslant u_1\leqslant 2$

La propriété est vraie au rang 1.

✔ On suppose que la propriété est vraie au rang n. Montrons qu'elle est vraie au rang n+1

$0\leqslant u_n\leqslant 2$

La fonction $x\longmapsto x^2$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, donc:

$0^2\leqslant u_n^2\leqslant 2^2$

$0\leqslant u_n^2\leqslant 4$

$\frac{0}{3}\leqslant\frac{u_n^2}{3}\leqslant\frac{4}{3}$

$0\leqslant\frac{u_n^2}{3}\leqslant\frac{4}{3}$

$-\frac{4}{3}\leqslant-\frac{u_n^2}{3}\leqslant 0$

$-\frac{4}{3}+2\leqslant-\frac{u_n^2}{3}+2\leqslant 0+2$

$\frac{2}{3}\leqslant-\frac{u_n^2}{3}+2\leqslant 2$

Donc: $0\leqslant u_{n+1}\leqslant 2$

✔ L'hérédité a été prouvée. D'après **le principe de récurrence**:

Pour tout entier $n\geqslant 1$, $\boxed{0\leqslant u_n\leqslant 2}$