Nombres complexes.

Écriture algébrique.

Conjugué.

1. Historique

Les mathématiciens du 16$^{\text{ième}}$ siècle TARTIGLIA (1499-1557), CARDAN (1501-1576) et BOMBELLI (1526-1572) étudient la résolution des équations du 3$^{\text{ième}}$ degré. Ces travaux mènent à l'introduction de « la racine carrée d'un nombre négatif ».

1.1. Introduction

Une équation du 3$^{\text{ième}}$ degré est une équation de la forme (E) : $AX^3+BX^2+CX+D=0$ avec X inconnue et A un nombre réel non nul, $B\,;C\,;D$ sont des nombres réels.
(E)
$\Leftrightarrow X^3+\frac{B}{A}X^2+\frac{C}{A}X+\frac{D}{A}=0$
$\Leftrightarrow X^3+B'X^2+C'X+D'=0$
On pose $X=x-\frac{B'}{3}$ et on obtient une équation de la forme : $x^3+px+q=0$.
(attention, historiquement l'équation était donnée sous la forme : $x^3=px+q$ c'est à dire il y a des différences de signes)

1.2. Formule de Cardan

(E) : $x^3+px+q=0$
On pose $x=u+v$ (avec $u\geqslant v$)
On remplace 1 inconnue x par 2 inconnues u et v mais ultérieurement on imposera une autre condition reliant u et v .
$(u+v)^3=u^3+3u^2v+3uv^2+v^3$
$(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$

(E) devient : $u^3+v^3+3uv(u+v)+p(u+v)+q=0$
Si on impose : $3uv+p=0 \Leftrightarrow uv=-\frac{p}{3}$
Et, (E) : $u^3+v^3+q=0$
$u^3+v^3=-q$
$uv=-\frac{p}{3} \Leftrightarrow u^3v^3=-\frac{p^3}{27}$
On pose $a=u^3$ et $b=v^3$ $(a\geqslant b)$
On a :
$$\begin{cases} a+b=-q \\ ab=-\frac{p^3}{27} \end{cases}$$
a et b sont les solutions de l'équation.
$X^2+qX-\frac{p^3}{27}=0$
$\Delta=q^2+\frac{4p^3}{27}=\frac{27q^2+4p^3}{27}$

Si $\Delta \geqslant 0$ alors $a=\dfrac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $b=\dfrac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}$.

$u=\sqrt[3]{a}$ et $v=\sqrt[3]{b}$

Les solutions de l'équation $x^3+px+q=0$ lorsque $\dfrac{4p^3+27q^2}{27}\geqslant 0$ est :

$$x=\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}$$

Cette formule est connue sous le nom de formule de **Cardan** mais c'est **Tartiglia** qui a initié cette méthode.

Exemples :

a) $x^3+3x-14=0$

$p=3$ et $q=-14$

$\Delta=14^2+4\times\dfrac{27}{27}=196+4=200$

$\sqrt{\Delta}=10\sqrt{2}$

$$x=\sqrt[3]{\frac{14+10\sqrt{2}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{14-10\sqrt{2}}{2}}$$

$$x=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$$

On remarque :

$(1+\sqrt{2})^3=1+3\sqrt{2}+6+2\sqrt{2}=7+5\sqrt{2}$

$(1-\sqrt{2})^3=1-3\sqrt{2}+6-2\sqrt{2}=7-5\sqrt{2}$

Donc,

$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}=u$

$\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}=v$

Et, $x=1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=2$

$S=\{2\}$

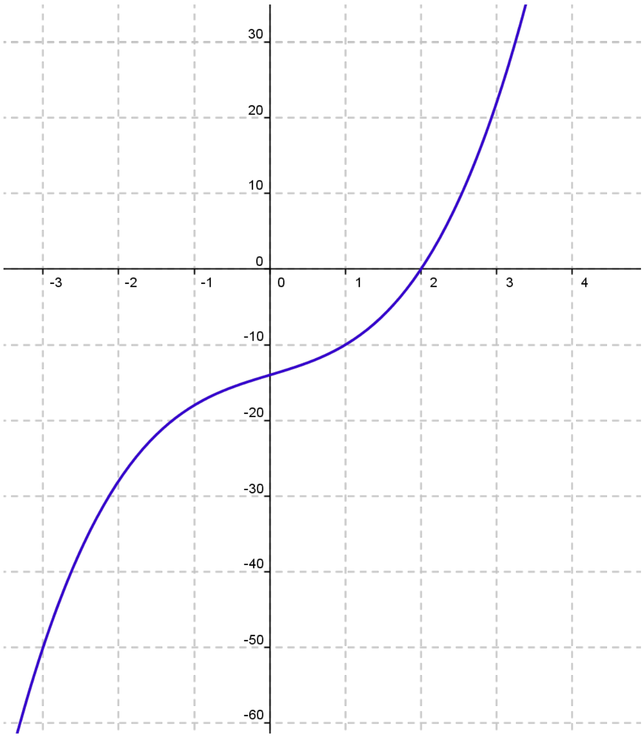
Interprétation graphique :

On considère la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+3x-14$.

$p=3>0$ $f'(x)=3x^2+3>0$

La fonction dérivée est strictement positive donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution.



L'abscisse de l'unique point d'intersection de la courbe et de l'axe des abscisses est 2.
Lorsque $p>0$ alors $\Delta>0$ donc la formule de Cardan nous permet de calculer l'unique solution de l'équation $f(x)=0$.

b) $x^3-6x-40=0$
$p=-6$ et $q=-40$
$\Delta=1600-4\times\frac{6^3}{27}=1568=2^5\times7^2$
$\sqrt{\Delta}=28\sqrt{2}$

$x=\sqrt[3]{\frac{40+28\sqrt{2}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{40-28\sqrt{2}}{2}}$
$x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

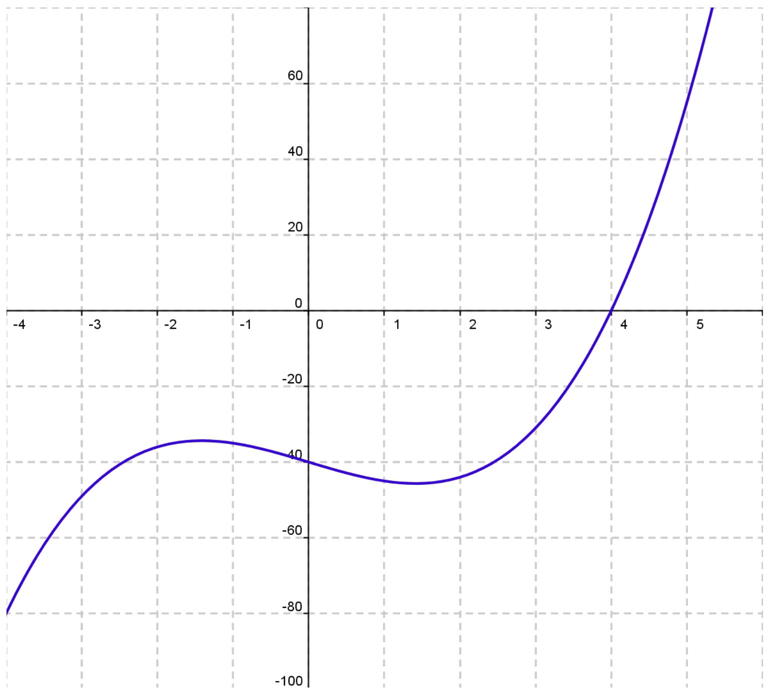
On remarque :
$(2+\sqrt{2})^3=8+12\sqrt{2}+12+2\sqrt{2}=20+14\sqrt{2}$
$(2-\sqrt{2})^3=8-12\sqrt{2}+12-2\sqrt{2}=20-14\sqrt{2}$
Donc,
$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}=u$
$\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=2-\sqrt{2}=v$
Et, $x=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4$
$S=\{4\}$

<u>Interprétation graphique :</u>
On considère la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-6x-40$.
$p=-6<0$ $f'(x)=3x^2-6=3(x^2-2)=3(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$
f admet un minimum relatif et un maximum relatif.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
Signe de f ' (x)		+	0	–	0	+	
Variations de f(x)	$-\infty$	↗	$f(-\sqrt{2})$	↘	$f(\sqrt{2})$	↗	$+\infty$

$f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}-6\sqrt{2}-40=-4\sqrt{2}-40$
$f(-\sqrt{2})=-2\sqrt{2}+6\sqrt{2}-40=4\sqrt{2}-40$
$f(\sqrt{2})\times f(-\sqrt{2})=(-40-4\sqrt{2})(-40+4\sqrt{2})=1600-32=1568=\Delta$
(Ce résultat peut se démontrer dans le cas général).
Si $\Delta>0$ alors le minimum et le maximum sont de même signe.

Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution.



L'abscisse de l'unique point d'intersection de la courbe et de l'axe des abscisses est 4.
Lorsque $p<0$ alors $\Delta>0$ donc la formule de Cardan nous permet de calculer l'unique solution de l'équation $f(x)=0$.

1.3. Équation de Bombelli

$x^3-15x-4=0$

$p=-15$ et $q=-4$

$\Delta=16-4\times\frac{15^3}{27}=16-4\times125=-484<0$

Interprétation graphique :

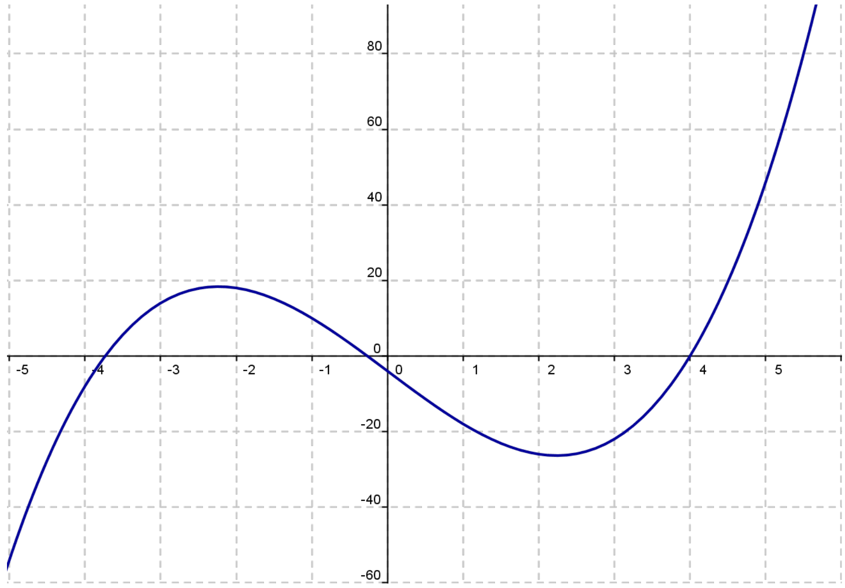
On considère la courbe représentative de la fonction f définie sur ℝ par $f(x)=x^3-15x-4$.

$p=-15<0 \quad f'(x)=3x^2-15=3(x^2-5)=3(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$

f admet un minimum relatif et un maximum relatif.

Le tableau de variations est semblable au précédent (on remplace $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ par $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$)

$f(\sqrt{5})\times f(-\sqrt{5})=\Delta<0$.



Les abscisses des points d'intersection de la courbe et de l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x)=0$.

Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $f(x)=0$ admet trois solutions.

Remarque :

Si on détermine une solution alors après factorisation on détermine les deux autres. Pour déterminer une solution, Bombelli propose d'utiliser la formule de Cardan en supposant qu'il existait un nombre **imaginaire** tel que son carré soit égal à -1.

On note alors ce nombre $\sqrt{-1}$ (cette notation est incorrecte).

$(\sqrt{-1})^2=-1$

$\Delta=-484=-4\times121=(2\times11)^2\times(-1)=(2\times11\times\sqrt{-1})^2$

On obtient :

$$x=\sqrt[3]{\frac{4+2\times11\times\sqrt{-1}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{4-2\times11\times\sqrt{-1}}{2}}$$

$$x=\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}$$

Sous cette forme, on ne reconnaît pas un nombre réel.

Bombelli fait remarquer :

$(\sqrt{-1})^2=-1$ et $(\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1}$

$(2+\sqrt{-1})^3=8+12\sqrt{-1}-6-\sqrt{-1}=2+11\sqrt{-1}$

$(2-\sqrt{-1})^3=8-12\sqrt{-1}-6+\sqrt{-1}=2-11\sqrt{-1}$

Donc, $\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}=2+\sqrt{-1}$ et $\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}=2-\sqrt{-1}$

Et, $x=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4$

Donc, 4 est une solution de l'équation $f(x)=0$.

L'hypothèse de l'existence de $\sqrt{-1}$ permet de trouver une solution de l'équation $f(x)=0$.

1.4. Notation

Le mathématicien Euler imposa en 1777 une nouvelle notation car la notation $\sqrt{-1}$ était incorrecte. Elle était incompatible avec les propriétés des radicaux.

Si a et b sont des réels positifs, on a $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$
Or, $(\sqrt{-1})\times(\sqrt{-1})=-1$ par définition et $\sqrt{(-1)\times(-1)}=\sqrt{1}=1$.
$\sqrt{-1}$ étant **un nombre imaginaire**, Euler nota ce nombre ***i*** et $\boxed{i^2=-1}$

2. Écriture algébrique d'un nombre complexe

2.1. Ensemble des nombres complexes

On nomme **nombre complexe** tout nombre z s'écrivant de la forme $\boxed{z=a+bi}$ avec a et b réels.
L'ensemble des nombres complexes se note $\mathbb{C}$.

2.2. Remarque

$\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$
Tout nombre réel est un nombre complexe.
Si $q\in\mathbb{R}$ alors $q=q+0\,\mathrm{i}$

2.3. Définitions

L'écriture $z=a+bi$, où a et b réels, se nomme **écriture algébrique** du nombre complexe z .

a et b se nomment respectivement **partie réelle** et **partie imaginaire** de z .
On les note $\boxed{\Re(z)=a}$ et $\boxed{\Im(z)=b}$.

Un nombre complexe z tel que $\Re(z)=0$ (donc $z=bi$)se nomme **imaginaire pur**.
($0=0+0\,\mathrm{i}=0\,\mathrm{i}$ est un imaginaire pur).

Exemples : $\Re(5+\mathrm{i})=5$ et $\Im(5+\mathrm{i})=1$.

2.4. Proposition

On admet le résultat suivant :

$$\boxed{z=z' \Leftrightarrow \begin{cases} \Re(z)=\Re(z') \\ \Im(z)=\Im(z') \end{cases}}$$

<u>En utilisant les écritures algébriques</u> :

$z=a+bi$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

$z'=a'+b'i$ avec $a'\in\mathbb{R}$ et $b'\in\mathbb{R}$

$$z=z' \Leftrightarrow \begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$$

<u>Cas particulier :</u>

$z=a+bi$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

$$z=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$$

2.5. Opérations dans $\mathbb{C}$

$z=a+bi$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

$z'=a'+b'i$ avec $a'\in\mathbb{R}$ et $b'\in\mathbb{R}$

a) L'addition

$$\boxed{z+z'=a+a'+(b+b')\mathrm{i}}$$

<u>Exemples :</u>

- $z=3+5\mathrm{i}$ $z'=-2+4\mathrm{i}$

$z+z'=3-2+(5+4)\mathrm{i}=1+9\mathrm{i}$

- Résoudre l'équation suivante d'inconnues les nombres réels x et y : $ix+2y-5\mathrm{i}=0$

$$2y+(x-5)\mathrm{i}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=0 \\ x-5=0 \end{cases}$$

Donc, $x=5$ et $y=0$

b) *La multiplication*

On définit la multiplication dans $\mathbb{C}$ en « conservant » les propriétés des opérations dans $\mathbb{R}$ (en particulier la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition) et en utilisant la définition du nombre i : $\mathrm{i}^2=-1$.

$$\begin{aligned} &(a+bi)\times(a'+b'i) \\ &=a\times a'+(bi)\times a'+a\times(b'i)+(bi)\times(b'i) \\ &=aa'+a'bi+ab'i+bb'i^2 \\ &=aa'+a'bi+ab'i-bb' \\ &=aa'-bb'+(a'b+ab')\mathrm{i} \end{aligned}$$

$$\boxed{z\times z'=aa'-bb'+(a'b+ab')\mathrm{i}}$$

Exemples :

- $z=2+3\text{i} \qquad z'=-3+2\text{i}$

$z\times z'=(2+3\text{i})\times(-3+2\text{i})=-6-9\text{i}+4\text{i}-6=-12-5\text{i}$

- $z=2-4\text{i}$

$(2-4\text{i})^2=4-16\text{i}+(4\text{i})^2=4-16\text{i}-16=-12-16\text{i}$

Cas particulier : multiplication d'un nombre complexe par un nombre réel.

$z=a+bi$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$
$z'=\lambda+0\text{i}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$
$z\times z'=(a\lambda)-b\times 0+(\lambda+a\times 0)\text{i}$
$z\times z'=\lambda a+\lambda bi$

Exemple :

- $z=5-2\text{i} \qquad \lambda=3$

$3z=15-6\text{i}$

2.6. Inverse d'un complexe non nul

$$\frac{1}{z}\times z=1 \Leftrightarrow (a'+b'i)\times(a+bi)=1$$

$z=a+bi$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ (et $a\neq 0$ ou $a'a-bb'+(a'b+ab')\text{i}=1$)
$z'=\frac{1}{z}=a'+b'i$ avec $a'\in\mathbb{R}$ et $b'\in\mathbb{R}$

On veut calculer a' et b' en fonction de a et b .

$a'a-bb'+(a'b+ab')\text{i}=1$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{aa}'-\text{bb}'=1 \\ \text{ba}'+\text{ab}'=0 \end{cases}$

On obtient un système de 2 équations à 2 inconnues a' et b' et de paramètres a et b .
On multiplie la première équation par a et la deuxième équation par b , puis on additionne les deux équations.

$\begin{cases} \text{a}^2\text{a}'-\text{abb}'=\text{a} \\ \text{b}^2\text{a}'+\text{abb}'=0 \end{cases}$

Donc :
$(a^2+b^2)a'=a$

Or, $a\neq 0$ ou $b\neq 0$ donc $a^2+b^2\neq 0$ donc, $a'=\frac{a}{a^2+b^2}$

Puis on multiplie la première équation par $-b$ et la deuxième équation par a , puis on additionne les deux équations.

$\begin{cases} -\text{aba}'+\text{b}^2\text{b}'=-\text{b} \\ \text{aba}'+\text{a}^2\text{b}'=0 \end{cases}$

Donc, $(a^2+b^2)b'=-b$

Or, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ donc $a^2+b^2 \neq 0$ donc, $b' = \dfrac{-b}{a^2+b^2}$

Donc, $\boxed{\dfrac{1}{z} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2}}$

2.7. Quotients de deux nombres complexes

$z = a+bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ $z \neq 0$
$z' = a'+b'i$ avec $a' \in \mathbb{R}$ et $b' \in \mathbb{R}$

$$\frac{z'}{z} = z' \times \frac{1}{z} = (a'+ib') \times \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{aa'+bb'+\mathrm{i}(ab'-a'b)}{a^2+b^2}$$

3. Conjugué d'un nombre complexe

3.1. Définition

Soit $z = a+bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
On nomme **nombre complexe conjugué** de z et on note $\bar{z}$ le nombre complexe $\boxed{\bar{z} = a-bi}$.

3.2. Propriétés

Soit $z = a+bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
$\boxed{\overline{(\bar{z})} = z}$

Démonstration :
$z = a+bi$
$\bar{z} = a-bi$
$\overline{(\bar{z})} = a+bi = z$

Soit $z = a+bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
$\boxed{z+\bar{z} = 2\Re(z)}$ et $\boxed{z-\bar{z} = 2\Im(z)\mathrm{i}}$

Démonstration :
$z = a+bi$
$\bar{z} = a-bi$
$z+\bar{z} = a+a = 2a = 2\Re(z)$
$z-\bar{z} = bi+bi = 2bi = 2\Im(z)\mathrm{i}$

Soit $z=a+bi$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$.
z réel $\Leftrightarrow b=0 \Leftrightarrow z=\bar{z}$
z imaginaire pur $\Leftrightarrow a=0 \Leftrightarrow \bar{z}=-z$

3.3. Nombres complexes conjugués et opérations

$z=a+bi$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$. $\qquad \bar{z}=a-bi$
$z'=a'+b'i$ avec $a'\in\mathbb{R}$ et $b'\in\mathbb{R}$. $\qquad \overline{z'}=a'-b'i$

$z+z'=a+a'+(b+b')\mathrm{i}$
$\overline{z+z'}=a+a'-(b+b')\mathrm{i}$
$\bar{z}+\overline{z'}=a+a'-(b+b')\mathrm{i}$
Donc, $\boxed{\overline{z+z'}=\bar{z}+\overline{z'}}$

$z\times z'=aa'-bb'+(a'b+ab')\mathrm{i}$
$\overline{z\times z'}=aa'-bb'-(a'b+ab')\mathrm{i}$
$\bar{z}\times\overline{z'}=aa'-bb'-(a'b+ab')\mathrm{i}$
Donc, $\boxed{\overline{z\times z'}=\bar{z}\times\overline{z'}}$

En particulier,
$z=\lambda\in\mathbb{R} \qquad \bar{\lambda}=\lambda$
$\overline{\lambda z'}=\bar{\lambda}\,\overline{z'}=\lambda\overline{z'}$
$\boxed{\overline{\lambda z'}=\lambda\overline{z'}}$

Si $z\neq 0$ $\quad z\times\frac{1}{z}=1$ donc, $\overline{\left(z\times\frac{1}{z}\right)}=\bar{1}=1$.
$\bar{z}\times\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=1$
Donc, $\boxed{\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\bar{z}}}$

Si $z'\neq 0$ $\quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\overline{\left(z\times\frac{1}{z'}\right)}=\bar{z}\times\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\bar{z}\times\frac{1}{\overline{z'}}=\frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$
Donc, $\boxed{\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\overline{z'}}}$

Soient z et z' deux nombres complexes. $\lambda\in\mathbb{R}$
$\overline{z+z'}=\bar{z}+\overline{z'} \qquad \overline{z\times z'}=\bar{z}\times\overline{z'} \qquad \overline{\lambda z'}=\lambda\overline{z'}$
Si $z\neq 0 \qquad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\bar{z}}$
Si $z'\neq 0 \qquad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$

3.4. Remarque

$z=a+bi$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$.
$\overline{z}=a-bi$

$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2+(ab-ab)\mathrm{i}=a^2+b^2$

$z=a+bi$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$.
$\boxed{z\overline{z}=a^2+b^2}$

Conséquence :
Si $z\neq 0$ alors $\boxed{\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}}$