

Exercice

On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- (a) Donner j^2 et j^3 sous forme algébrique.
(b) En déduire l'écriture algébrique de j^{12} et de j^{29} .
- Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.

Correction :

1. (a)

$$j^2 = \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2$$

$$j^2 = \frac{1}{4} - i \frac{\sqrt{3}}{2} + i^2 \frac{3}{4}$$

$$\boxed{j^2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

On peut **remarquer** que $\boxed{j^2 = \bar{j}}$

$$j^3 = \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$j^3 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

$$\boxed{j^3 = 1}$$

$$(b) j^{12} = (j^3)^4$$

$$j^{12} = 1^4 = 1$$

$$j^{29} = j^{27} \times j^2$$

$$j^{29} = (j^3)^9 \times j^2$$

$$j^{29} = j^2$$

$$j^{29} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2. 1 + j + j^2 = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1 + j + j^2 = 0$$