Exercice

Démontrer que pour tout entier naturel non nul n et tout nombre complexe z, on a $\overline{(z^n)}=(\overline{z})^n$.

Correction :

On veut démontrer en utilisant **un raisonnement par récurrence** que pour tout entier naturel non nul n et pour tout nombre complexe z, on a $\overline{(z^n)}=(\overline{z})^n$

Initialisation

Pour $n=1$

$\overline{(z^1)}=\overline{z}$ et $(\overline{z})^1=\overline{z}$

La propriété est vérifiée pour $n=1$

Hérédité

On suppose qu'il existe un entier n tel que $\overline{(z^n)}=(\overline{z})^n$ et on doit démontrer que $\overline{(z^{n+1})}=(\overline{z})^{n+1}$.

$z^{n+1}=z^n\times z$

$\overline{(z^{n+1})}=\overline{(z^n)}\times\overline{z}$

Or, $\overline{(z^n)}=(\overline{z})^n$

Donc, $\overline{(z^{n+1})}=(\overline{z})^n\times\overline{z}=(\overline{z})^{n+1}$

Conclusion

D'après **le principe de récurrence**, pour tout entier naturel non nul n et tout nombre complexe z, on a $\boxed{\overline{(z^n)}=(\overline{z})^n}$.