Nombres complexes.

Équations du 2ième degré

à coefficients réels dans $\mathbb{C}$.

1. Introduction

$z\in\mathbb{C}$. $a\in\mathbb{R}^*$. $b\in\mathbb{R}$. $c\in\mathbb{R}$

$$P(z)=az^2+bz+c$$

$$P(z)=a\left[z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right]$$

$$P(z)=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$$

$$P(z)=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

On pose $\Delta=b^2-4ac$

Δ est **le discriminant** de l'équation $P(z)=0$ ou du trinôme $P(z)$.

Δ est un nombre réel.

- *Premier cas* : $\Delta>0$

$$\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{\Delta}{4a^2}=\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$$

$$P(z)=a\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

L'équation $P(z)=0$ admet deux solutions réelles distinctes :

$z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

- *Deuxième cas* : $\Delta=0$

$$P(z)=a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2$$

L'équation $P(z)=0$ admet deux solutions réelles confondues :

$$z_1=z_2=-\frac{b}{2a}$$

- *Troisième cas* : $\Delta<0$

$\Delta=i^2(-\Delta)$ avec $-\Delta>0$

$$P(z)=a\left(z+\frac{b}{2a}+i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$$

L'équation $P(z)=0$ admet deux solutions complexes conjuguées :

$z_1=\frac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}$.

2. Théorème

Toute équation du 2ième degré à coefficients réels admet **deux solutions distinctes ou confondues** dans $\mathbb{C}$.

$az^2+bz+c=0$ avec $a\in\mathbb{R}^*$. $b\in\mathbb{R}$. $c\in\mathbb{R}$

- Si $\Delta>0$ alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes :
  $z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
  $S=\{z_1 ; z_2\}$
- Si $\Delta=0$ alors l'équation admet deux solutions réelles confondues :
  $z_1=z_2=-\frac{b}{2a}$
  $S=\{z_1\}$
- Si $\Delta<0$ alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :
  $z_1=\frac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}$.
  $z_2=\overline{z_1}$
  $S=\{z_1 ; z_2\}$

3. Exemples

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2-2z+4=0$

$\Delta=(-2)^2-4\times1\times4=4-16=-12<0$

L'équation admet deux solutions distinctes complexes conjuguées.

$-\Delta=12$, donc $\sqrt{-\Delta}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$z_1=\frac{2-2i\sqrt{3}}{2}=1-i\sqrt{3}$ et $z_2=\frac{2+2i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$

$S=\{1-i\sqrt{3};1+i\sqrt{3}\}$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2-8z+25=0$

$\Delta=(-8)^2-4\times1\times25=64-100=-36<0$

L'équation admet deux solutions distinctes complexes conjuguées.

$-\Delta=36$, donc $\sqrt{-\Delta}=\sqrt{36}=6$

$z_1=\frac{8-6i}{2}=4-3i$ et $z_2=\frac{8+6i}{2}=4+3i$

$S=\{4-3i;4+3i\}$

4. Remarque

Si $\Delta \in \mathbb{R}^*$ et si d est un nombre complexe (réel ou imaginaire pur) tel que $d^2=\Delta$, on dit que d est une racine carrée de Δ et les deux solutions distinctes (réelles ou complexes conjuguées) de l'équation sont :

$z_1=\frac{-b-d}{2a}$ $\qquad$ $z_2=\frac{-b+d}{2a}$

5. Exercice

θ est un nombre réel.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$z^2-2z\cos\theta+1=0$

$\Delta=(-2\cos\theta)^2-4\times1\times1=4\cos^2\theta-4=4(\cos^2\theta-1)$

Or, $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ donc $\cos^2\theta-1=-\sin^2\theta$

Donc, $\Delta=4(-\sin^2\theta)\leqslant 0$

a) $\Delta=0 \Leftrightarrow \sin^2\theta=0 \Leftrightarrow \sin\theta=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\theta=\ 0+2k\pi \\ \quad \text{ou} \\ \theta=\pi+2k\pi\end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$

L'équation admet deux solutions réelles confondues.

Si $\theta=0+2k\pi$ alors $\cos\theta=1$ et l'équation proposée devient :

$z^2-2z+1=0$

$\Leftrightarrow (z-1)^2=0$

Donc, $z_1=z_2=1$

$S=\{1\}$

Si $\theta=\pi+2k\pi$ alors $\cos\theta=-1$ et l'équation proposée devient :

$z^2+2z+1=0$

$\Leftrightarrow (z+1)^2=0$

Donc, $z_1=z_2=-1$

$S=\{-1\}$

b) $\Delta\neq0 \Leftrightarrow \sin^2\theta\neq0 \Leftrightarrow \sin\theta\neq0 \Leftrightarrow \begin{cases}\theta\neq\ 0+2k\pi \\ \quad \text{et} \\ \theta\neq\pi+2k\pi\end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$

$\Delta=4(-\sin^2\theta)=(i\,2\sin\theta)^2$

L'équation admet deux solutions distinctes complexes conjuguées :

$z_1 = \frac{2\cos\theta - 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta - i\sin\theta$ et $z_2 = \frac{2\cos\theta + 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta + i\sin\theta$

$S = \{\cos\theta - i\sin\theta ; \cos\theta + i\sin\theta\}$