Exercice

$\theta \in \mathbb{R}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$2z^2 - 2(1+\cos\theta)z + 1 + \cos\theta = 0$$

Correction :

$$\Delta=4(1+\cos\theta)^2-4\times2\times(1+\cos\theta)$$

$$\Delta=4(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)-8-8\cos\theta$$

$$\Delta=-4+4\cos^2\theta$$

$$\Delta=4(-1+\cos^2\theta)$$

$$\Delta=4(-\sin^2\theta)\leqslant0$$

$$\Delta=0 \Leftrightarrow \sin^2\theta=0 \Leftrightarrow \sin\theta=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\theta=0+2k\pi\\ \quad\text{ou}\\ \theta=\pi+2k\pi\end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$$

Si $\boxed{\theta=0+2k\pi}$ alors l'équation devient :

$$2z^2-4z+2=0 \Leftrightarrow 2(z^2-2z+1)=0 \Leftrightarrow 2(z-1)^2=0$$

L'équation admet **deux solutions réelles confondues** : $z_1=z_2=1$

$\boxed{S=\{1\}}$

Si $\boxed{\theta=\pi+2k\pi}$ alors l'équation devient :

$$2z^2=0 \Leftrightarrow z^2=0$$

L'équation admet **deux solutions réelles confondues** : $z_1=z_2=0$

$$\boxed{S=\{0\}}$$

$$\Delta<0 \Leftrightarrow \begin{cases} \theta\neq 0+2\mathrm{k}\pi \\ \text{et} \\ \theta\neq\pi+2\mathrm{k}\pi \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Delta=4\sin^2\theta i^2=(2\sin\theta i)^2$$

L'équation a **deux solutions distinctes complexes conjuguées**.

$$z_1=\frac{2(1+\cos\theta)-2\sin\theta i}{2}=1+\cos\theta-\sin\theta i$$

$$z_1=\frac{2(1+\cos\theta)+2\sin\theta i}{2}=1+\cos\theta+\sin\theta i$$

$$\boxed{S=\{1+\cos\theta-\sin\theta \mathrm{i};1+\cos\theta+\sin\theta \mathrm{i}\}}$$