Nombres complexes. Équations du 2ième degré à coefficients réels dans $\mathbb{C}$.

Exercice

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 \cos^2\theta - 2z\cos^2\theta + 1 = 0$$

Correction :

$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ donc $\cos^2\theta\neq 0$ donc **l'équation est bien une équation du second degré**.

$\Delta=(-2\cos^2\theta)^2-4\times\cos^2\theta\times 1$

$\Delta=4\cos^4\theta-4\cos^2\theta$

$\Delta=4\cos^2\theta(\cos^2\theta-1)$

$\Delta=4\cos^2\theta(-\sin^2\theta)$

$\Delta=-4\cos^2\theta\sin^2\theta\leqslant 0$

$\Delta=0 \Leftrightarrow \theta=0$ car $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

L'équation devient :

$z^2-2z+1=0 \Leftrightarrow (z-1)^2=0$

L'équation a **deux solutions confondues réelles** $z_1=z_2=1$

$S=\{1\}$

$\Delta < 0 \iff \theta \neq 0$

$\Delta = -4\cos^2\theta\sin^2\theta \leqslant 0 = (2\cos\theta\sin\theta\, i)^2$

L'équation a **deux solutions distinctes complexes conjuguées**.

$$z_1 = \frac{2\cos^2\theta - 2\cos\theta\sin\theta\, i}{2\cos^2\theta} = 1 - \frac{\sin\theta}{\cos}\theta\, i = 1 - \tan\theta\, i$$

$$z_2 = \frac{2\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta\, i}{2\cos^2\theta} = 1 + \frac{\sin\theta}{\cos}\theta\, i = 1 + \tan\theta\, i$$

$$\boxed{S = \{1 - \tan\theta\, \mathrm{i} ; 1 + \tan\theta\, \mathrm{i}\}}$$