Exercice

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2-16z+89=0$

2. Montrer que l'équation : $z^3-(16-\mathrm{i})z^2+(89-16\mathrm{i})z+89\mathrm{i}=0$ admet une solution imaginaire pur que l'on déterminera.

3. Développer : $(z+\mathrm{i})(z^2-16z+89)$

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$z^3-(16-i)z^2+(89-16i)z+89i=0$

Correction :

1. $\Delta=(-16)^2-4\times1\times89=256-356=-100<0$

L'équation a **deux solutions distinctes complexes conjuguées**.

$\Delta=(10\mathrm{i})^2$

$z_1=\dfrac{16-10i}{2}=8-5i$ et $z_2=\dfrac{16+10i}{2}=8+5i$

$\boxed{S=\{8-5\mathrm{i}\,;8+5\mathrm{i}\}}$

2. $z^3-(16-\mathrm{i})z^2+(89-16\mathrm{i})z+89\mathrm{i}=0$

bi (avec $b\in\mathbb{R}$)est une solution de l'équation

$\Leftrightarrow\ -b^3\mathrm{i}+(16-\mathrm{i})b^2+89bi+16b+89\mathrm{i}=0$

$\Leftrightarrow\ 16b^2+16b+\mathrm{i}(-b^3-b^2+89b+89)=0$

$\Leftrightarrow\ \begin{cases}16\mathrm{b}^2+16\mathrm{b}=0\,(1)\\-\mathrm{b}^3-\mathrm{b}^2+89\mathrm{b}+89=0\,(2)\end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow\ b^2+b=0\ \Leftrightarrow\ b(b+1)=0\qquad \mathrm{S}_1=\{0\,;-1\}$

$0 \notin S_2$

1-1-89+89=0 donc $-1 \notin S_2$

$\boxed{\mathrm{S}=\{-1\}}$

Donc $-i$ est <u>une solution imaginaire pur de l'équation</u>.

3. $(z+\mathrm{i})(z^2-16z+89)$

$= z^3-16z^2+89z+iz^2-16iz+89\mathrm{i}$

$= z^3-(16-\mathrm{i})z^2+(89-16\mathrm{i})z+89\mathrm{i}$

4. $z^3-(16-i)z^2+(89-16i)z+89i=0$

$\Leftrightarrow \ (z+\mathrm{i})(z^2-16z+89)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{z}+\mathrm{i}=0 \\ \quad \text{ou} \\ \mathrm{z}^2-16\mathrm{z}+89=0 \end{cases}$$

Les solutions de cette équation sont : $-\mathrm{i};8-5\mathrm{i};8+5\mathrm{i}$

$\boxed{S=\{-\mathrm{i};8-5\mathrm{i};8+5\mathrm{i}\}}$