

Exercice

Déterminer les nombres complexes tels que les points M ; M' et M'' d'affixes respectives z ; $\frac{1}{z}$ et $z-1$ appartiennent à un même cercle de centre O .

Correction :

M; M' et M'' appartiennent au même cercle de centre O si et seulement si $OM=OM'=OM''$, c'est à dire si et seulement si $|z|=|\frac{1}{z}|=|z-1|$

$$|z|=|\frac{1}{z}| \Leftrightarrow |z|^2=1=|z|^2 \Leftrightarrow \text{M appartient au cercle } (\Gamma) \text{ de centre O et de rayon 1.}$$

On note I(1)

$$|z-1|=IM \Leftrightarrow |z|=OM \Leftrightarrow \text{M appartient à la médiatrice } (\Delta) \text{ du segment [IO].}$$

$$(\Gamma) : x^2 + y^2 = 1 \text{ et } (\Delta) : x = \frac{1}{2}$$

On a donc:

$$\frac{1}{4} + y^2 = 1$$

$$y^2 = \frac{3}{4}$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

On obtient $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\boxed{A\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \text{ et } \boxed{B\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

