Nombres complexes. Représentation géométrique. Notation exponentielle.

Exercice

1. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$z_1=4+4\,\mathrm{i}$; $z_2=\sqrt{3}+\mathrm{i}$; $z_3=1-i\sqrt{3}$; $z_4=1+i\sqrt{3}$; $z_5=i-1$; $z_6=-4$; $z_7=\sqrt{3}-i$; $z_8=\sqrt{2}(i-1)$; $z_9=i\sqrt{3}-1$; $z_{10}=-4+4\,\mathrm{i}$

2. En donner une écriture trigonométrique et une écriture exponentielle de chaque nombre complexe.

3. À chaque nombre complexe z_k de la première question, on associe son image M_k dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité 2 cm. Dessiner avec précision les points M_k.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Correction :

1. $|z_1|^2=4^2+4^2$
$|z_1|^2=16+16$
$|z_1|=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$z_1=4\sqrt{2}\left(\frac{4}{4\sqrt{2}}+\mathrm{i}\frac{4}{4\sqrt{2}}\right)$
$z_1=4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$z_1=4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\cos\theta_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta_1=\frac{\pi}{4}(2\pi)$
$z_1=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=4\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

$|z_2|^2=\sqrt{3}^2+1^2$
$|z_2|^2=3+1$
$|z_2|=2$

$z_2=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\frac{1}{2}\right)$

$\cos\theta_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta_2=\frac{1}{2}$ donc $\theta_2=\frac{\pi}{6}(2\pi)$
$z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

$|z_3|^2=1^2+(-\sqrt{3})^2$
$|z_3|^2=1+3$
$|z_3|=2$

$z_3=2\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\cos\theta_3=\frac{1}{2}$ et $\sin\theta_3=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta_3=\frac{-\pi}{3}(2\pi)$
$z_3=2\left(\cos(\frac{-\pi}{6})+i\sin(\frac{-\pi}{6})\right)=2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

$|z_4|^2=1^2+\sqrt{3}^2$
$|z_4|^2=1+3$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$|z_4|=2$

$z_4=2\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\cos\theta_4=\frac{1}{2}$ et $\sin\theta_4=\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta_4=\frac{\pi}{3}(2\pi)$

$\boxed{z_4=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$

$|z_5|^2=(-1)^2+1^2$
$|z_5|^2=1+1$
$|z_5|=\sqrt{2}$

$z_5=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$z_5=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\cos\theta_5=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta_5=\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta_5=\pi-\frac{\pi}{4}(2\pi)$

$\theta_5=\frac{3\pi}{4}(2\pi)$

$\boxed{z_5=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}}$

$|z_6|^2=(-4)^2$
$|z_6|^2=16$
$|z_6|=4$

$z_6=4(-1+\mathrm{i}0)$

$\cos\theta_6=-1$ et $\sin\theta_6=0$ donc $\theta_6=\pi(2\pi)$

$\boxed{z_6=4\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}$

$|z_7|^2=\sqrt{3}^2+(-1)^2$
$|z_7|^2=3+1$
$|z_7|=2$

$z_7=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}\frac{1}{2}\right)$

$\cos\theta_7=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta_7=\frac{-1}{2}$ donc $\theta_7=\frac{-\pi}{6}(2\pi)$

$\boxed{z_7=2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$|z_8|^2=\sqrt{2}^2((-1)^2+1^2)$
$|z_8|^2=2\times 2$
$|z_8|=2$

$z_8=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\cos\theta_8=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta_8=\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta_8=\pi-\frac{\pi}{4}(2\pi)$

$\theta_8=\frac{3\pi}{4}(2\pi)$

$$z_8=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=2e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$|z_9|^2=1^2+\sqrt{3}^2$
$|z_9|^2=1+3$
$|z_9|=2$

$z_9=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\cos\theta_9=\frac{-1}{2}$ et $\sin\theta_9=\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta_9=\pi-\frac{\pi}{3}(2\pi)$

$\theta_9=\frac{2\pi}{3}(2\pi)$

$$z_9=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$|z_{10}|^2=(-4)^2+4^2$

$|z_{10}|^2=16+16$
$|z_{10}|=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$z_{10}=4\sqrt{2}\left(-\frac{4}{4\sqrt{2}}+i\frac{4}{4\sqrt{2}}\right)$
$z_{10}=4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

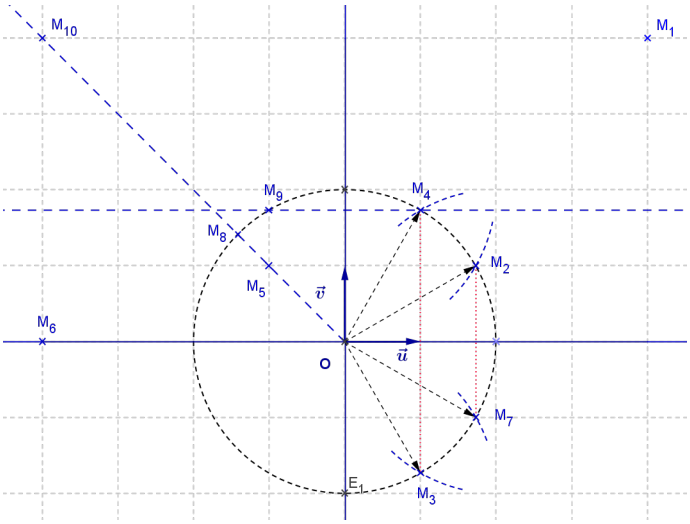
$\cos\theta_{10}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta_{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta_{10}=\pi-\frac{\pi}{4}(2\pi)$

$\theta_{10}=\frac{3\pi}{4}(2\pi)$

$$z_{10}=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=4\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

3.



Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés