Exercice

Soit $z \in \mathbb{C}$ .On pose $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

1. Déterminer la partie réelle $\Re(Z)$ et la partie imaginaire $\Im(Z)$ du nombre complexe:

$Z = 3z^2 + z.\bar{z} - 6\mathrm{i}\sqrt{2}$

2. Résoudre l'équation:

(E): $3z^2 + z.\bar{z} - 6\mathrm{i}\sqrt{2} = 0$

Correction :

1. $z=x+iy$

$Z=3z^2+z.\bar{z}-6i\sqrt{2}$

$Z=3(x+iy)^2+(x+iy)\overline{(x+iy)}-6i\sqrt{2}$

$Z=3(x^2+2ixy-y^2)+(x+iy)(x-iy)-6i\sqrt{2}$

$Z=3x^2+6ixy-3y^2+x^2+y^2-6i\sqrt{2}$

$Z=4x^2-2y^2+i(6xy-6\sqrt{2})$

Donc:

$\boxed{\Re(Z)=4x^2-2y^2}$

$\boxed{\Im(Z)=6xy-6\sqrt{2}}$

2.

$Z=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-2y^2=0 \\ 6xy-6\sqrt{2}=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x-\sqrt{2}y)(2x+\sqrt{2}y)=0 \\ 6(xy-\sqrt{2})=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-\sqrt{2}y=0 \\ xy-\sqrt{2}=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2x+\sqrt{2}y=0 \\ xy-\sqrt{2}=0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x=\sqrt{2}y \\ xy-\sqrt{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}y \\ xy-\sqrt{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}y \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}y^2-\sqrt{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}y \\ \sqrt{2}y^2-2\sqrt{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}y \\ y^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}y \\ y=\sqrt{2}\, ou\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$

Si $\boxed{y=\sqrt{2}}$ alors $\boxed{x=1}$

Si $\boxed{y=-\sqrt{2}}$ alors $\boxed{x=1}$

b) $\begin{cases} 2x+\sqrt{2}y=0 \\ xy-\sqrt{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}y \\ xy-\sqrt{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}y \\ \dfrac{-\sqrt{2}}{2}y^2-\sqrt{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}y \\ -\sqrt{2}y^2-2\sqrt{2}=0 \end{cases}$

L'équation (2) n'a pas de solution

Conclusion: $\boxed{S=\{1+i\sqrt{2};1-i\sqrt{2}\}}$