Exercice

Dans le plan complexe, à tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que :

$z'=z\bar{z}+(1+\mathrm{i})z+3\bar{z}-2$.

1. (a) Déterminer les affixes $z_{A'}$ et $z_{B'}$ des points A' et B', associés aux points A et B d'affixes respectives $z_A=2+\mathrm{i}$ et $z_B=-i$.

(b) Déterminer l'affixe z_K du milieu K de [AB].

(c) Déterminer l'affixe $z_{K'}$ du point K' associé à K.

(d) K' est-il le milieu de [A'B'] ?

2. On pose $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ (x, y, x', y' réels).

Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.

3. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan tels que z' soit réel.

4. Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M du plan tels que z' soit imaginaire pur.

Correction :

1. (a) $z_{A'}=z_A\overline{z_A}+(1+\mathrm{i})z_A+3\overline{z_A}-2$

$z_{A'}=(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})+(1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})+3(2-\mathrm{i})-2$

$z_A{}'=4+1+2+\mathrm{i}+2\mathrm{i}-1+6-3\mathrm{i}-2$

$\boxed{z_A{}'=10}$

$z_{B'}=z_B\overline{z_B}+(1+\mathrm{i})z_B+3\overline{z_B}-2$

$z_{B'}=(-\mathrm{i})(\mathrm{i})+(1+\mathrm{i})(-\mathrm{i})+3\mathrm{i}-2$

$z_{B'}=1-\mathrm{i}+1+3\mathrm{i}-2$

$\boxed{z_{B'}=2\mathrm{i}}$

(b) $z_K=\dfrac{z_A+z_B}{2}$

$z_K=\dfrac{2+\mathrm{i}-i}{2}$

$\boxed{z_K=1}$

(c) $z_{K'}=z_K\overline{z_K}+(1+\mathrm{i})z_K+3\overline{z_K}-2$

$z_{K'}=1\times1+(1+\mathrm{i})\times1+3\times1-2$

$z_{K'}=1+1+\mathrm{i}+3-2$

$\boxed{z_K{}'=3+\mathrm{i}}$

(d) L'affixe du milieu de [A'B'] est: $\dfrac{z_{A'}+z_{B'}}{2}=\dfrac{10+2\mathrm{i}}{2}=5+\mathrm{i}$

Donc **K' n'est pas le milieu de [AB]**.

2. $z'=z\overline{z}+(1+\mathrm{i})z+3\overline{z}-2$

$z'=(x+iy)(x-iy)+(1+\mathrm{i})(x+iy)+3(x-iy)-2$

$z'=x^2+y^2+x+iy+ix-y+3x-3iy-2$

$z'=x^2+y^2+x-y+3x-2+\mathrm{i}(x-2y)$

On a donc:

$$\begin{cases} x'=x^2+y^2+4x-y-2 \\ y'=\quad x-2y \end{cases}$$

3. $\mathrm{M} \in \mathscr{E} \Leftrightarrow x-2y=0$

$\mathrm{M} \in \mathscr{E} \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x$

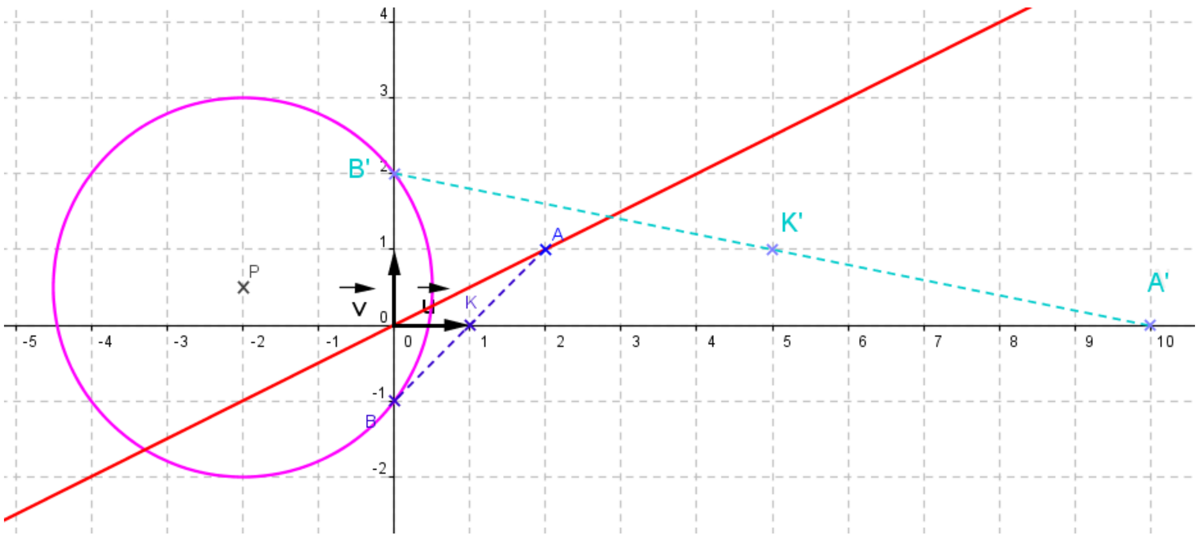
$\mathscr{E}$ est la droite d'équation $\boxed{y=\frac{1}{2}x}$

4. $\mathrm{M} \in \mathscr{F} \Leftrightarrow x^2+y^2+4x-y-2=0$

$\mathrm{M} \in \mathscr{F} \Leftrightarrow (x+2)^2-4+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-2=0$

$\mathrm{M} \in \mathscr{F} \Leftrightarrow (x+2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$

$\mathscr{F}$ est le cercle de centre $\boxed{\mathrm{P}\left(-2+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)}$ et de rayon $\frac{5}{2}$



Remarques:

$A(2+\mathrm{i}) \in \mathscr{E}$

$B(-\mathrm{i}) \in \mathscr{F}$

On remarque que $B'(2\mathrm{i}) \in \mathscr{F}$

On appelle B'' l'image de B'.

D'après la question 2:

$z_{B''}=2^2-2-2+\mathrm{i}\times(-2)\times 2$

$z_{B''}=-4\mathrm{i}$