Exercice

Pour chacune de ces questions, une seule réponse est exacte. On donnera la réponse exacte et on justifiera le choix.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. Soit z un nombre complexe vérifiant $\bar{z}+|z|=6+2\mathrm{i}$. Alors l'écriture algébrique de z est :

a) $\frac{8}{3}-2\mathrm{i}$ b) $-\frac{8}{3}-2\mathrm{i}$ c) $\frac{8}{3}+2\mathrm{i}$ d) $-\frac{8}{3}+2\mathrm{i}$

2. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z=x+iy$ vérifiant $|z-1|=|z+\mathrm{i}|$ est la droite d'équation :

a) $y=x-1$ b) $y=-x$ c) $y=-x+1$ d) $y=x$

3. Soit n un entier naturel. Le nombre complexe $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^n$ est réel si, et seulement si, n s'écrit sous la forme :

a) $3k+1$, $k\in\mathbb{N}$ b) $3k+2$, $k\in\mathbb{N}$ c) $3k$, $k\in\mathbb{N}$ d) $6k$, $k\in\mathbb{N}$

4. On pose $z=-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Un argument de z^2 est :

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $-\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{3\pi}{4}$ d) $-\frac{3\pi}{4}$.

5. On pose $z=-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Un argument de z est :

a) $\frac{7\pi}{8}$ b) $\frac{\pi}{8}$ c) $\frac{5\pi}{8}$ d) $\frac{3\pi}{8}$.

6. Soient D la droite d'équation $y=x\sqrt{3}$ et M un point de D d'abscisse strictement positive. On appelle z l'affixe de M. Alors :

a) $arg(z)=\frac{\pi}{6}$ b) $arg(z)=\frac{\pi}{4}$ c) $arg(z)=\frac{\pi}{3}$ d) $arg(z)=\frac{2\pi}{3}$.

7. Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ, où θ est un nombre réel. Un argument de $\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{\bar{z}}$ est :

a) $\frac{\pi}{6}+\theta$ b) $\theta-\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{6}-\theta$ d) $\frac{\pi}{3}-\theta$.

8. Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ, où θ est un nombre réel. Un argument de $z+|z|$ est :

a) $\frac{\theta}{2}$ b) θ c) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\theta}{4}$

Correction :

1. $\left|\frac{8}{3}-2\mathrm{i}\right|=\left|-\frac{8}{3}-2\mathrm{i}\right|=\left|\frac{8}{3}+2\mathrm{i}\right|=\left|-\frac{8}{3}+2\mathrm{i}\right|=\sqrt{\frac{64}{9}+4}=\sqrt{\frac{64}{9}+\frac{36}{9}}=\sqrt{\frac{100}{9}}=\frac{10}{3}$

- ✗ Si $z=\frac{8}{3}-2\mathrm{i}$

  $\overline{\frac{8}{3}-2\mathrm{i}}=\frac{8}{3}+2\mathrm{i}$

  $\bar{z}+|z|=\frac{8}{3}+2\mathrm{i}+\frac{10}{3}=6+2\mathrm{i}$

- ✗ Si $z=-\frac{8}{3}-2\mathrm{i}$

  $\overline{\frac{-8}{3}-2\mathrm{i}}=\frac{-8}{3}+2\mathrm{i}$

  $\bar{z}+|z|=\frac{-8}{3}+2\mathrm{i}+\frac{10}{3}=\frac{2}{3}+2\mathrm{i}$

- ✗ Si $z=\frac{8}{3}+2\mathrm{i}$

  $\overline{\frac{8}{3}+2\mathrm{i}}=\frac{8}{3}-2\mathrm{i}$

  $\bar{z}+|z|=\frac{8}{3}-2\mathrm{i}+\frac{10}{3}=6-2\mathrm{i}$

- ✗ Si $z=-\frac{8}{3}+2\mathrm{i}$

  $\overline{\frac{-8}{3}+2\mathrm{i}}=\frac{-8}{3}-2\mathrm{i}$

  $\bar{z}+|z|=\frac{-8}{3}-2\mathrm{i}+\frac{10}{3}=\frac{2}{3}-2\mathrm{i}$

Donc $\boxed{z=\frac{8}{3}-2\mathrm{i}}$

2. $z-1=x-1+iy$
$|z-1|^2=(x-1)^2+y^2$
$z+\mathrm{i}=x+\mathrm{i}(y+1)$
$|z+\mathrm{i}|^2=x^2+(y+1)^2$

$|z-1|=|z+\mathrm{i}|$
$\Leftrightarrow\ |z-1|^2=|z+\mathrm{i}|^2$
$\Leftrightarrow\ (x-1)^2+y^2=x^2+(y+1)^2$
$\Leftrightarrow\ x^2-2x+1+y^2=x^2+y^2+2y+1$
$\Leftrightarrow\ -2x+1=2y+1$
$\Leftrightarrow\ 2y=-2x$
$\Leftrightarrow\ y=-x$

L'ensemble des points M d'affixe $z=x+iy$ vérifiant $|z-1|=|z+\mathrm{i}|$ est la droite d'équation $y=x$.

3.
Calculons:
$(1+i\sqrt{3})^2$
$= 1^2+2\times 1\times i\sqrt{3}+(i\sqrt{3})^2$
$= 1+2i\sqrt{3}-3$
$= -2+2i\sqrt{3}$

$(1+i\sqrt{3})^3$
$= 1^3+3\times 1\times(i\sqrt{3})^2+3\times 1^2\times(i\sqrt{3})+(i\sqrt{3})^3$
$= 1-3\times 3+3i\sqrt{3}-i\times 3\sqrt{3}$
=1-9
=-8

Si n est un nombre entier naturel alors, n s'écrit $n=3k$ ou $3k+1$ ou $3k+2$ ($k\in\mathbb{N}$)

- ✔ Si $n=3k+1$

$(1+i\sqrt{3})^n=\left((1+i\sqrt{3})^3\right)^k\times(1+i\sqrt{3})=(-8)^k\times(1+i\sqrt{3})$

Le nombre complexe n'est pas réel.

1. Si $n=3k+2$

$(1+i\sqrt{3})^n=\left((1+i\sqrt{3})^3\right)^k\times(1+i\sqrt{3})^2=(-8)^k\times(-2+2i\sqrt{3})$

Le nombre complexe n'est pas réel.

- ✔ Si $n=3k$

$(1+i\sqrt{3})^n=\left((1+i\sqrt{3})^3\right)^k=(-8)^k$

Le nombre complexe est réel.
Conclusion:
$(1+i\sqrt{3})^n$ est réel si et seulement si n s'écrit sous la forme $\boxed{3k}$ avec $k\in\mathbb{N}$

Remarque:

- ✔ Si $n=6k$

$(1+i\sqrt{3})^n=\left((1+i\sqrt{3})^3\right)^{2k}=(-8)^{2k}=64^k$

Le nombre complexe est réel.
Par contre, la réciproque est fausse, si $(1+i\sqrt{3})^n$ est réel, n n'est pas forcément de la forme $n=6k$ avec $k\in\mathbb{N}$

Par exemple, $(1+i\sqrt{3})^3$ est réel et 3 n'est pas de la forme $6k$ avec $k\in\mathbb{N}$

4.
$z^2=(i\sqrt{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2+\sqrt{2}})^2$
$z^2=-2+\sqrt{2}-2\times i\times\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}+2+\sqrt{2}$
$z^2=2\sqrt{2}-2i\sqrt{2^2-\sqrt{2}^2}$
$z^2=2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}$

$|z^2|^2=(2\sqrt{2})^2+(-2\sqrt{2})^2$

$|z^2|^2=8+8$

$|z^2|^2=16$

$|z^2|=4$

$z^2=4\left(\frac{2\sqrt{2}}{4}-\frac{2i\sqrt{2}}{4}\right)$

$z^2=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\boxed{\theta=\frac{-\pi}{4}(2\pi)}$

Un argument de z² est $\boxed{-\frac{\pi}{4}}$.

5. D'après la question précédente, un argument de z² est $-\frac{\pi}{4}$

$\arg z^2=2\arg z(2\pi)$

$\arg z^2=2\arg z+2k\pi$

$2\arg z=\arg z^2-2k\pi$

$2\arg z=\frac{-\pi}{4}-2k\pi$

$\arg z=-\frac{\pi}{8}-k\pi$

Pour $k=-1$, $\arg z=-\frac{\pi}{8}+\pi=\frac{7\pi}{8}$

Un argument de z est $\boxed{\frac{7\pi}{8}}$.

6. $z=x+ix\sqrt{3}$

$|z|^2=x^2+(x\sqrt{3})^2$

$|z|^2=x^2+3x^2$

$|z|^2=4x^2$

Comme $x>0$,

$|z|=2x$

$x\neq 0$

$z=2x\left(\frac{x}{2x}+i\frac{x\sqrt{3}}{2x}\right)$

$z=2x\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\cos\theta=\frac{1}{2}$ et $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\boxed{\theta=\frac{\pi}{3}(2\pi)}$

7.

$\arg\frac{\sqrt{3}-i}{\bar{z}}=\arg(\sqrt{3}-i)-\arg\bar{z}(2\pi)$

$\arg\frac{\sqrt{3}-i}{\bar{z}}=\arg(\sqrt{3}-i)+\arg z(2\pi)$

Or,

$|\sqrt{3}-i|^2=(\sqrt{3})^2+(-1)^2$

$|\sqrt{3}-i|^2=4$

$|\sqrt{3}-i|=2$

$\sqrt{3}-i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)$

$\cos\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta_1=\frac{-1}{2}$ donc $\arg(\sqrt{3}-i)=\frac{-\pi}{6}(2\pi)$

On a donc:

$\boxed{\arg\frac{\sqrt{3}-i}{\bar{z}}=\frac{-\pi}{6}+\theta(2\pi)}$

8. A(z) $(\vec{u};\overrightarrow{OA})=\theta(2\pi)$

$B(|z|)$ $|z|>0$ $\arg|z|=0(2\pi)$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}(z+|z|)$ $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ et OA=OB donc **OACB est un losange**.

Par suite, [OC] est **la bissectrice** de $\widehat{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})}$

Donc: $(\vec{u};\overrightarrow{OC})=\frac{\theta}{2}(2\pi)$

Un argument de $z+|z|$ est $\boxed{\frac{\theta}{2}}$.