

Exercice

Dans le plan complexe rapporté au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A; B et C de coordonnées respectives $A(3; -1)$; $B(5; 1)$ et $C(2; 1)$.

1. Quelles sont les affixes des points A; B et C et des vecteurs \vec{AB} ; \vec{AC} ; \vec{BC} ?
2. On définit les points D et E par $\vec{AD} = 2\vec{AB} + \vec{AC}$ et $3\vec{BE} = \vec{BC}$. Déterminer l'affixe de chacun des points D et E .
3. Démontrer que A; D et E sont alignés.

Correction :

1. $z_A = 3 - i$

$z_B = 5 + i$

$z_C = 2 + i$

$\vec{AB}(5+i-3+i)$

$\vec{AB}(2+2i)$

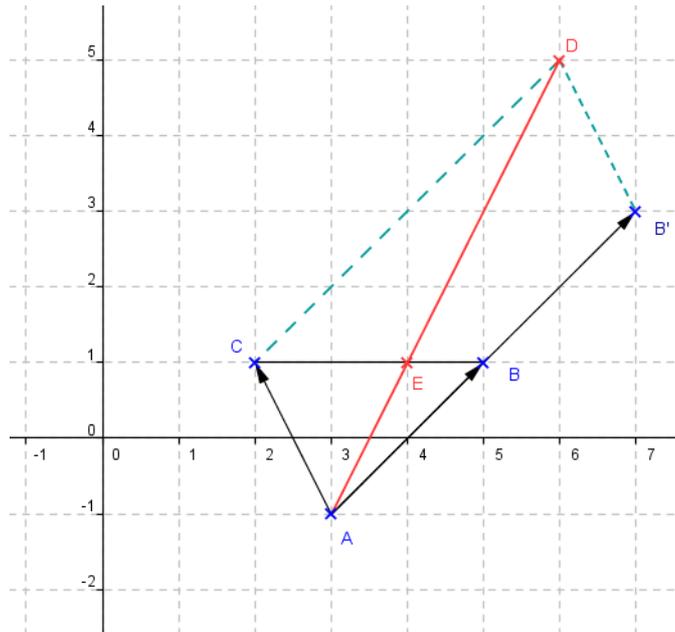
$\vec{AC}(2+i-3+i)$

$\vec{AC}(-1+2i)$

$\vec{BC}(2+i-5-i)$

$\vec{BC}(-3+0i)$

2.



$\vec{AD} = 2\vec{AB} + \vec{AC}$

Pour la construction du point D, on place le point B' tel que $\vec{AB'} = 2\vec{AB}$, puis on construit le parallélogramme CAB'D.

$\vec{AB}(2+2i)$

$2\vec{AB}(4+4i)$

et $\vec{AC}(-1+2i)$

$\vec{AD} = 2\vec{AB} + \vec{AC}(4-1+4i+2i)$

$\vec{AD}(3+6i)$

$D(z_D)$ $z_D = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

$\vec{AD}(z_D - z_A)$ $\vec{AD}(3+6i)$

$x + iy - (3 - i) = 3 + 6i$

$x - 3 + i(y + 1) = 3 + 6i$

$\begin{cases} x - 3 = 3 \\ y + 1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 5 \end{cases}$

$D(6+5i)$

$z_D = 6 + 5i$

$$3 \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC}$$

On place sur le dessin le point E tel que $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{BC}(-3+0i) \quad \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}(-1+0i)$$

$E(z_E)$ $z_E = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

$$\overrightarrow{BE}(z_E - z_B)$$

$$z_E - z_B = x + iy - (5+i) = x - 5 + i(y-1)$$

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow x - 5 + i(y-1) = -1 + 0i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = -1 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$E(4+i)$$

$$\boxed{z_E = 4 + i}$$

$$3. \overrightarrow{AE}(4+i-(3-i))$$

$$\overrightarrow{AE}(1+2i)$$

$$\overrightarrow{AD}(6+5i-(3-i))$$

$$\overrightarrow{AD}(3+6i)$$

On a $3+6i = 3(1+2i)$

Donc $\overrightarrow{AD} = 3 \overrightarrow{AE}$.

Par suite, les points **A; D et E sont alignés.**