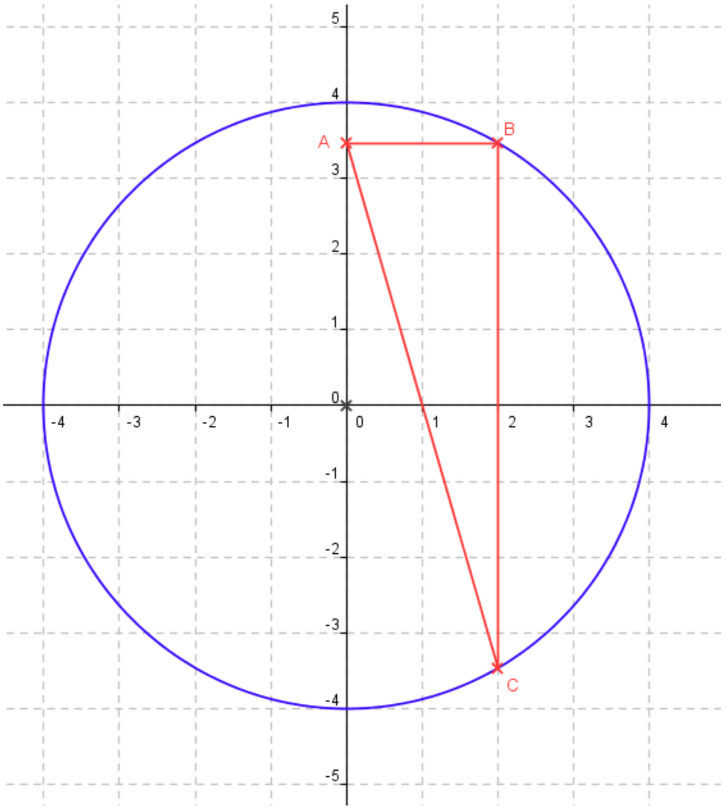
Exercice

1. Dans le plan complexe rapporté au repère $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points B et C d'affixes $z_B=2+2i\sqrt{3}$ et $z_C=2-2i\sqrt{3}$
Vérifier que B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 4.

2. On considère le point A d'affixe $z_A=\frac{z_B-z_C}{2}$
Calculer z_A puis $|z_B-z_A|$; $|z_C-z_A|$ et $|z_B-z_C|$
3. Déterminer la nature du triangle ABC.

Correction

1.



$|z_B|^2=2^2+(2\sqrt{3})^2=4+4\times 3=4+12=16$
$|z_B|=OB=4$

$|z_C|^2=2^2+(-2\sqrt{3})^2=4+4\times 3=4+12=16$
$|z_C|=OC=4$

Remarque: $z_C=\overline{z_B}$ donc $|z_B|=|z_C|$

$\boxed{OB=OC=4}$ donc **les points B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 4**.

2.
$z_B-z_C=z_B-\overline{z_B}=2\,i\,\Im(z_B)$
$\boxed{z_A=\dfrac{z_B-z_C}{2}=i\,\Im(z_B)=2\,i\sqrt{3}}$

$z_B-z_A=2+2\,i\sqrt{3}-2i\sqrt{3}=2$
$\boxed{|z_B-z_A|=2}$

$z_C-z_A=2-2\,i\sqrt{3}-2i\sqrt{3}=2-4i\sqrt{3}$
$\boxed{|z_C-z_A|=\sqrt{2^2+(-4\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+16\times 3}=\sqrt{52}}$

$z_B-z_C=2+2\,i\sqrt{3}-2+2i\sqrt{3}=4i\sqrt{3}$
$\boxed{|z_B-z_C|=4\sqrt{3}}$

3.
Dans le triangle ABC:
$AB=|z_B-z_A|=2$
$AC=|z_C-z_A|=\sqrt{52}$
$BC=|z_B-z_C|=4\sqrt{3}$
Donc:
$BC^2+BA^2=48+4=52$
$AC^2=52$

On a $\boxed{AC^2=BC^2+BA^2}$. Donc **le triangle ABC est rectangle en B d'après la réciproque du théorème de Pythagore**.