## Exercice

Dans le plan complexe rapporté au repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$
1. Déterminer géométriquement l'ensemble des points M d'affixes $z$ vérifiant:
a) $|iz+1-\mathrm{i}|=|z+3|$
b) $|\bar{z}+2-\mathrm{i}|=2$
c) $|iz+2+\mathrm{i}|=3$
2. Donner dans chaque cas une équation cartésienne de l'ensemble trouvé.

**Correction :**

1.
a) $|iz+1-\mathrm{i}|=|z+3|$
$iz+1-\mathrm{i}=\mathrm{i}\left(z+\frac{1}{\mathrm{i}}-1\right)=\mathrm{i}(z-\mathrm{i}-1)$
Soit $A(1+\mathrm{i})$

$AM=|z-\mathrm{i}-1|$
Or, $|iz+1-\mathrm{i}|=|i(z-i-1)|=|z-1-i|=AM$

Soit $B(-3)$
$BM=|z+3|$

$|iz+1-\mathrm{i}|=|z+3|$
$\Leftrightarrow\ AM=BM$
$\Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice du segment [AB]
Donc l'ensemble cherché est $(\Delta)$ **médiatrice du segment [AB]**.

b) $|\bar{z}+2-\mathrm{i}|=2$

$\bar{z}+2-\mathrm{i}=\overline{z+2+\mathrm{i}}$
Soit $I(-2-\mathrm{i})$
$\mathrm{IM}=|z+2+i|$

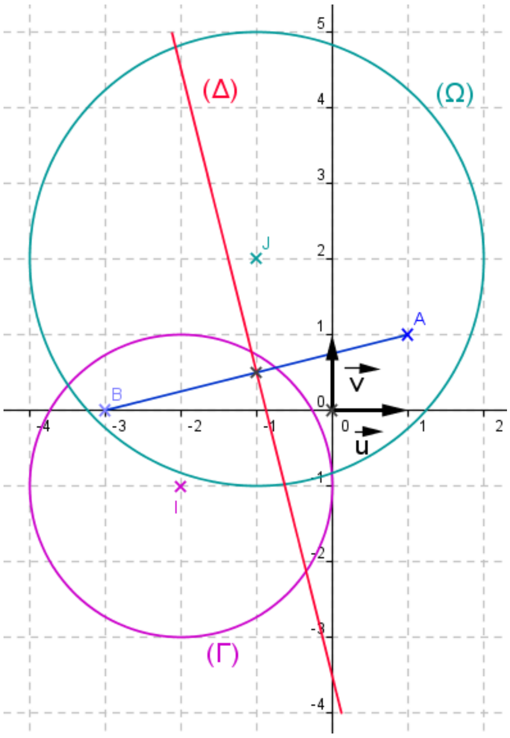
$|\bar{z}+2-\mathrm{i}|=|\overline{z+2+i}|=|z+2+i|=\mathrm{IM}$

$|\bar{z}+2-\mathrm{i}|=2$
$\Leftrightarrow$ IM=2
$\Leftrightarrow$ M appartient au cercle de centre I et de rayon 2.
Donc l'ensemble cherché est $(\Gamma)$ **cercle de centre I et de rayon 2**.

c) $|iz+2+\mathrm{i}|=3$
$iz+2+\mathrm{i}=\mathrm{i}\left(z+\frac{2}{\mathrm{i}}+1\right)=\mathrm{i}(z+1-2\mathrm{i})$
Soit $J(-1+2\mathrm{i})$
$\mathrm{JM}=|z+1-2\mathrm{i}|$

$|iz+2+\mathrm{i}|=|i(z+1-2\mathrm{i})|=|z+1-2\mathrm{i}|=JM$

$|iz+2+\mathrm{i}|=3$
$\Leftrightarrow\ JM=3$
$\Leftrightarrow$ M appartient au cercle de centre J et de rayon 3.
Donc l'ensemble cherché est $(\Omega)$ **cercle de centre J et de rayon 3**.




2.

$z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

a) $|iz + 1 - i| = |z + 3|$

$iz + 1 - i = i(x + iy) + 1 - i = ix - y + 1 - i = (1 - y) + i(x - 1)$
$|iz + 1 - i|^2 = (1 - y)^2 + (x - 1)^2$

$z + 3 = x + iy + 3 = (x + 3) + iy$
$|z + 3|^2 = (x + 3)^2 + y^2$

$|iz + 1 - i| = |z + 3|$
$\Leftrightarrow\ (1 - y)^2 + (x - 1)^2 = (x + 3)^2 + y^2$
$\Leftrightarrow\ 1 - 2y + y^2 + x^2 - 2x + 1 = x^2 + 6x + 9 + y^2$
$\Leftrightarrow\ -8x - 2y - 7 = 0$
$(\Delta)$ : **$-8x - 2y - 7 = 0$**

b) $|\bar{z} + 2 - i| = 2$

$\bar{z} + 2 - i = x - iy + 2 - i = (x + 2) - i(y + 1)$
$|\bar{z} + 2 - i|^2 = (x + 2)^2 + (y + 1)^2$

$|\bar{z} + 2 - i| = 2$
$\Leftrightarrow\ (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$
$\Leftrightarrow\ x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$
$(\Gamma)$ : **$x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$**

c) $|iz + 2 + i| = 3$

$iz + 2 + i = i(x + iy) + 2 + i = ix - y + 2 + i = (2 - y) + i(x + 1)$
$|iz + 2 + i|^2 = (2 - y)^2 + (x + 1)^2$

$|iz+2+\mathrm{i}|=3$
$\Leftrightarrow \ (2-y)^2+(x+1)^2=9$
$\Leftrightarrow \ x^2+y^2+2x-4y-4=0$
$(\Omega)$ : **$x^2+y^2+2x-4y-4=0$**