Géométrie vectorielle.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

1. Ensemble des vecteurs de l'espace

On étend à l'espace la notion de vecteur et les opérations associées.

a) A ; B ; A' et B' sont quatre points de l'espace tels que A≠B.

- Si A'$\notin$(AB) et si $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$ alors le point B' appartient au plan (ABA') et le quadrilatère ABB'A' est un parallélogramme.
- Si A'$\in$(AB) et si $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$ alors le quadrilatère ABB'A' est un parallélogramme aplati.
- $\overrightarrow{AB}$ est un représentant du vecteur $\vec{u}$.

b) A ; B et C sont 3 points de l'espace.

- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (Relation de Chasles).
- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ avec ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati).

c) Pour tous vecteurs : $\vec{u};\vec{v};\vec{w}$

- $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
- $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$
- $\vec{0}=\overrightarrow{AA}$
- $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$
- $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ $\qquad -\vec{u}=\overrightarrow{BA}$
- $\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$

d) λ est un nombre réel et $\vec{u}$ est un vecteur de l'espace

- Si $\vec{u}=\vec{0}$ alors $\vec{v}=\lambda.\vec{u}=\vec{0}$
- Si $\vec{u}\neq\vec{0}$, on pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ alors :
  pour $\lambda=0$ $\vec{v}=\lambda.\vec{u}=\vec{0}$
  pour $\lambda>0$ $\vec{v}=\lambda.\vec{u}=\overrightarrow{AC}$ avec C$\in$[AB) et AC= λ AB
  pour $\lambda<0$ $\vec{v}=\lambda.\vec{u}=\overrightarrow{AC}$ avec C$\in$[BA) et AC=- λ AB

e) Pour tous nombres réels λ et μ et tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

- $\lambda.(\vec{u}+\vec{v})=\lambda.\vec{u}+\lambda.\vec{v}$
- $\lambda.(\mu.\vec{u})=(\lambda\times\mu).\vec{u}$
- $(\lambda+\mu).\vec{u}=\lambda.\vec{u}+\mu.\vec{u}$
- $1.\vec{u}=\vec{u}$

2. Vecteurs colinéaires

2.1. Définition

On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si : $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{u}\neq\vec{0}$ et il existe un réel λ tel que $\vec{v}=\lambda\vec{u}$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

2.2. Remarque

Les points de l'espace A ; B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

2.3. Droite définie par un point et un vecteur directeur

$\vec{u}$ est un vecteur non nul de l'espace et A est un point de l'espace.
On nomme **droite D passant par A et de vecteur directeur** $\vec{u}$ l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires.
On note $D=(A;\vec{u})$

M appartient à D si et seulement si il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM}=t.\vec{u}$

Remarque : Si $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ alors D=(AB)

2.4. Droites parallèles

On peut vérifier que les droites $D=(A;\vec{u})$ et $D'=(A';\overrightarrow{u'})$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont colinéaires.

3. Vecteurs coplanaires

3.1.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires de l'espace. On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc les points A ; B et C ne sont pas alignés.
Soit P le plan (ABC).
$(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ est un repère de P.
Pour tout point M de P il existe $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AM}=x.\overrightarrow{AB}+y.\overrightarrow{AC}$
Réciproquement : tout point M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM}=x.\overrightarrow{AB}+y.\overrightarrow{AC}$ appartient à P.

Copyright © meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

3.2. Définition

$\vec{u};\vec{v};\vec{w}$ sont 3 vecteurs de l'espace.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors on dit que les vecteurs $\vec{u};\vec{v};\vec{w}$ sont **coplanaires** si et seulement s'il existe $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ tels que $\vec{w}=a.\vec{u}+b.\vec{v}$

Remarques :

- Dans ce cas, on dit que la partie $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ est **une partie liée** ou que les vecteurs $\vec{u};\vec{v}\,et\,\vec{w}$ sont **linéairement dépendants**.
- Si $\vec{u}\,et\,\vec{v}$ sont colinéaires alors les vecteurs sont aussi coplanaires.

3.3. Vecteurs non coplanaires

$\vec{u};\vec{v};\vec{w}$ sont 3 vecteurs de l'espace.
On dit que les vecteurs $\vec{u};\vec{v};\vec{w}$ **ne sont pas coplanaires** si et seulement $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et il n'existe pas de nombres réels a et b tels que $\vec{w}=a.\vec{u}+b.\vec{v}$

Remarque:

- Dans ce cas, on dit que la partie $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ est **une partie libre** ou que les vecteurs $\vec{u};\vec{v}\,et\,\vec{w}$ sont **linéairement indépendants**.

4. Plan défini par un point et deux vecteurs directeurs

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires de l'espace et A est un point de l'espace.
On nomme **plan P passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$**, l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\vec{u};\vec{v}\,et\,\overrightarrow{AM}$ soient coplanaires.

On note $P=(A;\vec{u};\vec{v})$

Remarques :

- Si $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ alors P=(ABC)
- P est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe des nombres réels a et b vérifiant $\overrightarrow{AM}=a.\vec{u}+b.\vec{v}$.

5. Plans parallèles

$\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont deux vecteurs colinéaires non nuls.
$\vec{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ sont deux vecteurs colinéaires non nuls.
A et A' sont deux points de l'espace.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires ($\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{v'}$ ne sont pas aussi colinéaires) alors les plans $P(A;\vec{u};\vec{v})$ et $P'(A';\overrightarrow{u'};\overrightarrow{v'})$ alors les plans $P(A;\vec{u};\vec{v})$ et $P'(A';\overrightarrow{u'};\overrightarrow{v'})$ sont parallèles.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Démonstration :

$D=(A;\vec{u})=(AB)$ avec $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$

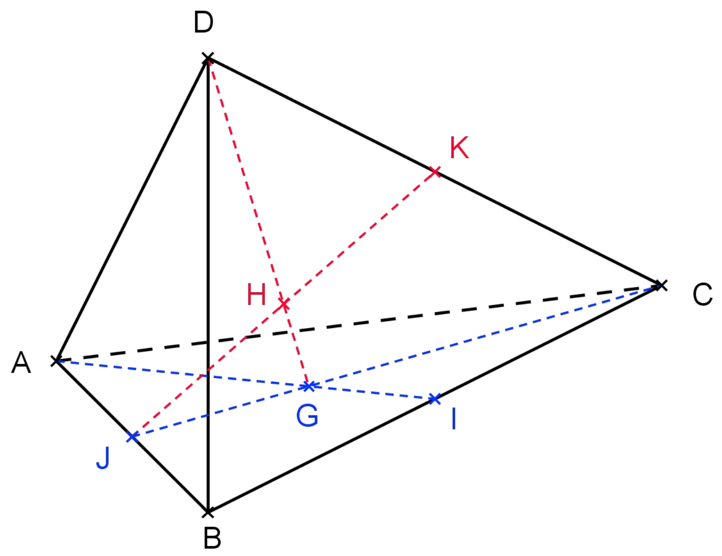
$D'=(A';\vec{u'})=(A'B')$ avec $\vec{u'}=\overrightarrow{A'B'}$

$\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont deux vecteurs colinéaires donc (AB) et (A'B') sont parallèles.
$\Delta=(A;\vec{v})=(AC)$ avec $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

$\Delta'=(A';\vec{v'})=(A'C')$ avec $\vec{v'}=\overrightarrow{A'C'}$
$\vec{v}$ et $\vec{v'}$ sont deux vecteurs colinéaires donc (AC) et (A'C') sont parallèles.
(AB) et (AC) sont deux droites sécantes contenues dans P.
(A'B') et (A'C') sont deux droites sécantes contenues dans P'.
Deux droites sécantes de P sont parallèles à deux droites sécantes de P' donc les plans P et P' sont parallèles.

6. Calcul vectoriel

6.1. Exercice



ABCD est un tétraèdre. I est le milieu de [BC]. J est le milieu de [AB]. K est le milieu de [DC]. G est le centre de gravité du triangle ABC.

H est le point tel que $\overrightarrow{DH}=\frac{3}{4}.\overrightarrow{DG}$

Démontrer que les points J ; H et K sont alignés.

Il suffit de démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{JH}$ et $\overrightarrow{KH}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{JH}=\overrightarrow{JG}+\overrightarrow{GH}$

Or, G est le centre de gravité du triangle ABC donc $\overrightarrow{JG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{JC}$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{DH}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DG}$ donc $\overrightarrow{GH}=\left(\frac{3}{4}-1\right)\overrightarrow{DG}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{DG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{GD}$.

Par suite, $\overrightarrow{JH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{JC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{GD}$.

$\overrightarrow{KH}=\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{DH}$

Or K est le milieu de [DC] donc $\overrightarrow{KD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$. On a aussi $\overrightarrow{DH}=\frac{3}{4}.\overrightarrow{DG}$.

Donc, $\overrightarrow{KH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{DG}$

$\overrightarrow{KH}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GD})+\frac{3}{4}\overrightarrow{DG}$

$\overrightarrow{KH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CG}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{DG}$

$\overrightarrow{KH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CG}+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)\overrightarrow{GD}$

$\overrightarrow{KH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CG}-\frac{1}{4}\overrightarrow{GD}$

Or, $\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CJ}$

$\overrightarrow{KH}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{CJ}\right)-\frac{1}{4}\overrightarrow{GD}$

$\overrightarrow{KH}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{JC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{GD}$

On a donc $\overrightarrow{JH}=-\overrightarrow{KH}$

Conclusion : les points J, K et K sont alignés.

(Remarque : H est le milieu de [JK])

6.2. Décomposition d'un vecteur en fonction de trois vecteurs non coplanaires

$\vec{u}\,;\vec{v}\;et\;\vec{w}$ sont trois vecteurs non coplanaires de l'espace.

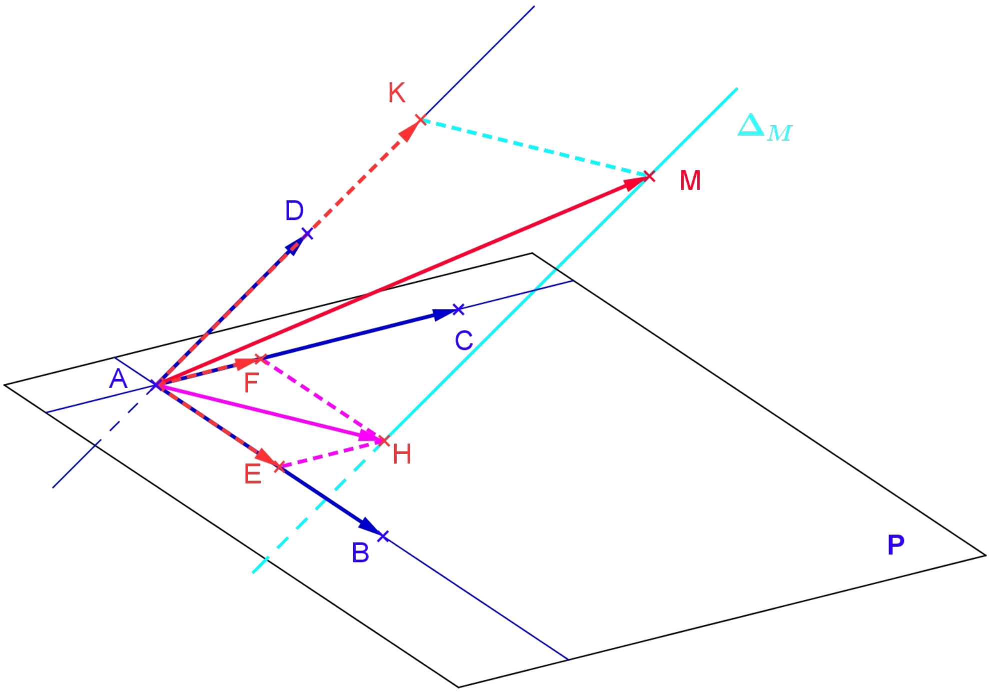
$\vec{V}$ est un vecteur quelconque de l'espace.

On veut démontrer que l'on peut écrire $\vec{V}$ en fonction de $\vec{u}\,;\vec{v}\;et\;\vec{w}$.

On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}\,;\vec{v}=\overrightarrow{AC}\,;\vec{w}=\overrightarrow{AD}$.

$\vec{V}=\overrightarrow{AM}$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés



On pose P le plan (ABC), la droite (AD) est sécante au plan P en A.

La parallèle Δ_M à (AD) passant par M est sécante au plan P en H.

Si H=A alors $\Delta_M = (AD)$, c'est à dire M$\in$(AD), les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires et il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AD} = t\,\vec{w}$.

Donc, $\vec{V} = \overrightarrow{AM} = 0\,\vec{u} + 0\,\vec{v} + t\,\vec{w}$

Si H=M alors $\vec{V} = \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v} + 0\,\vec{w}$

Si H≠M alors la parallèle à (AH) passant par M coupe (AD) en K.

AHMK est un parallélogramme et $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AK}$

K$\in$(AD) donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AK} = c\,\vec{w}$

Et, donc, $\vec{V} = \overrightarrow{AM} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v} + c\,\vec{w}$

<u>Conclusion :</u>

tout vecteur de l'espace s'écrit comme combinaison linéaire de trois vecteurs non coplanaires. On admet que cette écriture est unique.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

7. Géométrie analytique

7.1. Repères et coordonnées d'un vecteur ou d'un point

a) Repères de l'espace

$\vec{i}\,;\vec{j}\,et\,\vec{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires de l'espace.

O est un point de l'espace.

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est **un repère de l'espace**.

b) Coordonnées d'un vecteur

Pour tout vecteur $\vec{V}$ de l'espace, il existe un unique triplet de nombres réels $(x\,;y\,;z)$ tel que :

$\vec{V}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

Le triplet $(x\,;y\,;z)$ se nomme **triplet des coordonnées** de $\vec{V}$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

x est **l'abscisse** de $\vec{V}$.

y est **l'ordonnée** de $\vec{V}$.

z est **la cote** de $\vec{V}$.

On note $\vec{V}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

c) Coordonnées d'un point

Les coordonnées du point M dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le même repère.

On note $M(x\,;y\,;z)$.

d) Remarques

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est un repère de l'espace.

- Si $\vec{V}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{V}'\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ alors $\vec{V}+\vec{V}'\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$.
- Si $\vec{V}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ alors $\lambda\vec{V}\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\\\lambda z\end{pmatrix}$.
- Vecteurs colinéaires : $\vec{V}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{V}'\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$

Si $\vec{V}\neq\vec{0}$ c'est à dire $x\neq0$ ou $y\neq0$ ou $z\neq0$ alors $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel t tel

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

que $\vec{V}'=t\vec{V}$ donc $\begin{cases} x'=tx \\ y'=ty \\ z'=tz \end{cases}$.

Exemple 1

$\vec{V}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\vec{V}'\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \frac{-2}{3}= t\times 2 \\ -1= t\times 3 \\ \frac{4}{3}=t\times(-4) \end{cases}$ On obtient un système de 3 équations à une inconnue.

$\begin{cases} t=\frac{-1}{3} \\ t=\frac{-1}{3} \\ t=\frac{-1}{3} \end{cases}$ Donc $t=\frac{-1}{3}$ et les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ sont colinéaires.

Exemple 2

$\vec{V}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\vec{V}'\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 20 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -5= t\times 1 \\ 2= t\times 0 \\ 20=t\times(-4) \end{cases}$

$\begin{cases} t=-5 \\ 0t=2 \\ t=-5 \end{cases}$

L'équation $0t=2$ n'admet pas de solutions donc les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ ne sont pas colinéaires.

7.2. Représentations paramétriques d'une droite

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est un repère de l'espace.

a) <u>D est la droite passant par</u> $A(x_A;y_A;z_A)$ <u>et de vecteur directeur</u> $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. $a\neq 0$ ou $b\neq 0$ ou $c\neq 0$

$M(x;y;z)$ appartient à D si et seulement s'il existe un réel t tel que $\vec{AM}=t\vec{u}$, c'est à dire :

$$\begin{cases} x-x_A=at \\ y-y_A=bt \\ z-z_A=ct \end{cases}$$

On écrit, $\begin{cases} x=at+x_A \\ y=bt+y_A \\ z=ct+z_A \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

Ce système se nomme **representation paramétrique de la droite D**.

Exemple :

A(1;-2;3) $\qquad \vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$D=(A;\vec{u}) \quad \begin{cases} x=-t+1 \\ y=3t-2 \\ z=2t+3 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

Pour $t=2$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=4 \\ z=7 \end{cases}$

Le point B(-1;4;7) appartient à la droite D.

Le point $E\left(\frac{-1}{2};-\frac{1}{2};-2\right)$ appartient-il à la droite D ?

$$\begin{cases} \frac{-1}{2}=-t+1 \\ \frac{-1}{2}=3t-2 \\ -2=2t+3 \end{cases} \qquad \begin{cases} t=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2} \\ 3t=\frac{-1}{2}+2=\frac{3}{2} \\ 2t=\ -3-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} t=\frac{3}{2} \\ t=\frac{1}{2} \\ t=\frac{-5}{2} \end{cases}$$

Donc, E n'appartient pas à la droite D.

b) <u>D est la droite (AB)</u>

$A(x_A;y_A;z_A) \qquad B(x_B;y_B;z_B) \qquad A\neq B$

$D=(A;\vec{AB})$ (par exemple, on peut aussi écrire $D=(B;\vec{BA})$ ou...)

$$\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \\ z_B-z_A \end{pmatrix}$$

D : $\begin{cases} x=(x_B-x_A)t+x_A \\ y=(y_B-y_A)t+y_A \\ z=(z_B-z_A)t+z_A \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

c) Demi-droite [AB)

M∈[AB) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et de même sens donc il existe un réel positif t tel que :

$\overrightarrow{AM}=t\,\overrightarrow{AB}$

$$(AB):\begin{cases} x=(x_B-x_A)t+x_A \\ y=(y_B-y_A)t+y_A \\ z=(z_B-z_A)t+z_A \end{cases} \quad t\in[0;+\infty[$$

d) Segment [AB]

$$[AB]:\begin{cases} x=(x_B-x_A)t+x_A \\ y=(y_B-y_A)t+y_A \\ z=(z_B-z_A)t+z_A \end{cases} \quad t\in[0;1]$$

7.3. Positions relatives de deux droites

On considère les droites $D=(A;\vec{u})$ avec $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $D'=(A';\vec{u'})$ avec $\vec{u'}\neq\vec{0}$.

a) Si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont **colinéaires** alors D et D' sont **parallèles**.

Et si A appartient à D' ou A' appartient à D alors les droites D et D' sont confondues.

Et si A n'appartient pas à D' ou A' n'appartient pas à D alors les droites D et D' sont strictement parallèles.

Exemple :

$$D:\begin{cases} x=2t-3 \\ y=-t+5 \\ z=\frac{1}{3}t-1 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

D est la droite passant par $A(-3;5;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

$$D':\begin{cases} x=-3t'+1 \\ y=\frac{3}{2}t'-2 \\ z=-\frac{1}{2}t'+3 \end{cases} \quad t'\in\mathbb{R}$$

D' est la droite passant par $A'(1;-2;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u'}\begin{pmatrix} -3 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

On vérifie que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires.

$$\vec{u'}=a\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} -3= & 2a \\ \frac{3}{2}= & -a \\ -\frac{1}{2}=\frac{1}{3}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{3}{2} \\ a=-\frac{3}{2} \\ a=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

Donc, $\vec{u'}=-\frac{3}{2}\vec{u}$

On veut déterminer si le point A appartient ou n'appartient pas à la droite D'.

$$\begin{cases} -3= & -3t'+1 \\ 5=\frac{3}{2}t'-2 \\ -1=-\frac{1}{2}t'+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3t'=-4 \\ \frac{3}{2}t'=7 \\ -\frac{1}{2}t'=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t'=\frac{4}{3} \\ t'=\frac{14}{3} \\ t'=8 \end{cases}$$

Donc A n'appartient pas à D'

Conclusion : les droites D et D' sont strictement parallèles.

b) Si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ **ne sont pas colinéaires** alors D et D' **ne sont pas parallèles**.

On détermine alors l'intersection des deux droites.

S'il existe un point d'intersection alors les deux droites sont sécantes.

S'il n'existe pas de point d'intersection alors les deux droites ne sont pas coplanaires.

Exemple

$$D : \begin{cases} x= t-3 \\ y= -2t+1 \\ z=3t-2 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

D est la droite passant par $A(-3;1;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$D' : \begin{cases} x= 2t'-\frac{1}{2} \\ y= 4t'+4 \\ z=-t'-\frac{3}{2} \end{cases} \quad t'\in\mathbb{R}$$

D' est la droite passant par $A'(-\frac{1}{2};4;-\frac{3}{2})$ et de vecteur directeur $\vec{u'}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$$\vec{u'}=a\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} 2= a \\ 4=-2a \\ -1= 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a= \ \ 2 \\ a= \ -2 \\ a=\dfrac{-1}{3} \end{cases}$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ne sont pas colinéaires.

Intersection de D et D' :

$$\begin{cases} t-3=2t'-\dfrac{1}{2} \\ -2t+1= 4t'+4 \\ 3t-2=-t'-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-2t'= 3-\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}(1) \\ -2t-4t'= \ \ 3(2) \\ 3t+t'=\dfrac{-3}{2}+2=\dfrac{1}{2}(3) \end{cases}$$

On considère le système constitué des équations (1) et (2) :

On obtient : $-8t'=8$ donc $t'=-1$

Et, donc $t=\frac{5}{2}-2=\frac{1}{2}$

On remplace dans l'équation (3) :

$$3\times\frac{1}{2}+(-1)=\frac{1}{2}$$

On remplace t par $\frac{1}{2}$ dans la représentation paramétrique de D ou t' par -1 dans la représentation de D' pour obtenir les coordonnées du point d'intersection des droites D et D'.

Conclusion : Les droites D et D' sont sécantes en $I\left(-\frac{5}{2};0;-\frac{1}{2}\right)$

c) <u>Remarque</u> :

Si on commence par déterminer l'intersection des deux droites et que l'on obtient que cette intersection est vide, on ne peut pas directement conclure car les deux droites sont strictement parallèles ou ne sont pas coplanaires.

7.4. Représentations paramétriques d'un plan

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est un repère de l'espace.

a) P est le plan passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$. ($\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ne sont pas colinéaires).

$M(x;y;z)$ appartient à P si et seulement s'il existe deux nombres réels t et t' tels que $\vec{AM}=t\vec{u}+t'\vec{u'}$, c'est à dire :

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$\begin{cases} x-x_A=at+a't' \\ y-y_A=bt+b't' \\ z-z_A=ct+c't' \end{cases}$, on écrit :

$\begin{cases} x=at+a't'+x_A \\ y=bt+b't'+y_A \\ z=ct+c't'+z_A \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \text{ et } t'\in\mathbb{R}$

Ce système se nomme **représentation paramétrique du plan P**.

Exemple :

Soit P le plan passant par A(1;0;1) et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$.

(On vérifie facilement que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ne sont pas colinéaires.

P: $\begin{cases} x=1t+0t'+1 \\ y=2t+3t'+0 \\ z=0t+1t'+1 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \text{ et } t'\in\mathbb{R}$

Le point $B\left(\frac{1}{4};-3;\frac{1}{2}\right)$ appartient-il au plan P ?

$\begin{cases} \frac{1}{4}= t+1 \\ -3=2t+3t' \\ \frac{1}{2}= t'+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-\frac{3}{4} \\ 2t+3t'= -3 \\ t'=-\frac{1}{2} \end{cases}$

$2t+3t'=2\times-\frac{3}{4}+3\times-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=-3$

Donc le point B appartient au plan P.

Le point E(1;1;1) appartient-il au plan P ?

$\begin{cases} 1= t+1 \\ 1=2t+3t' \\ 1= t'+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ 2t+3t'=1 \\ t'=0 \end{cases}$

$2t+3t'=2\times0+3\times0=0\neq1$

Donc le point E n'appartient pas au plan P.

b) Si les points A ; B et C ne sont pas alignés alors $P=(ABC)=(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

En ayant les coordonnées des points A ; B et C, on détermine facilement une représentation paramétrique de P.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

c) Équations cartésiennes d'un plan

On reprend l'exemple du plan $P=(A;\vec{u};\vec{v})$.

A(1;0;1) ; $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$.

$M(x;y;z)$ appartient au plan P si et seulement s'il existe deux nombres réels t et t' tels que :

$$\begin{cases}x=t+1\\ y=2t+3t'\\ z=t'+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=\quad x-1\\ y=2(x-1)+3(z-1)\\ t'=\quad z-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=\quad x-1\\ t'=\quad z-1\\ y=2x-2+3z-3\end{cases}$$

$M(x;y;z)$ appartient au plan P si et seulement $2x-y+3z-5=0$.

Cette équation se nomme **équation cartésienne du plan P**.

d) Remarque :

Dans la leçon suivante (le repère sera choisi orthonormé), on déterminera plus rapidement une équation cartésienne d'un plan et on étudiera les positions relatives d'une droite et d'un plan.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés