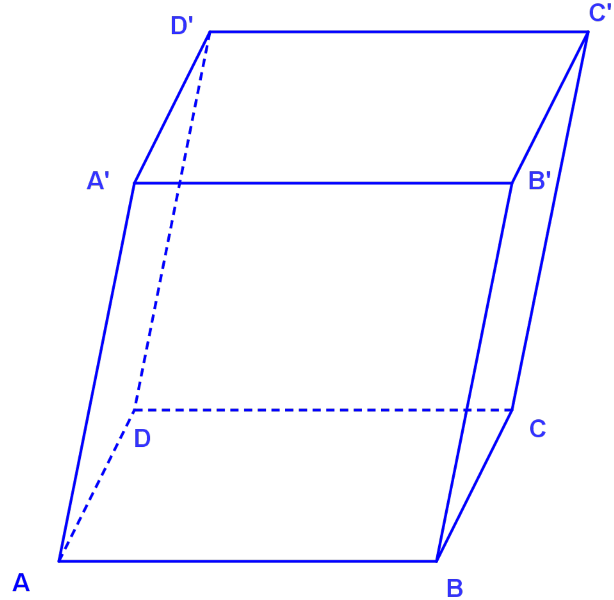
Exercice

ABCDA'B'C'D' est un parallélépipède.



1. Exprimer en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AA'}$ les vecteurs suivants : $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC'}$; $\overrightarrow{D'B}$; $\overrightarrow{D'C}$.

2. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC'}$ et $\overrightarrow{AD'}$ sont coplanaires.

Correction :

1.

Les six faces du parallélépipède sont des parallélogrammes donc **ABCD est un parallélogramme** et

$\boxed{\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+0\,\overrightarrow{AA'}}$

ACC'A' est aussi un parallélogramme donc $\boxed{\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}}$

DBB'D' est aussi un parallélogramme donc $\boxed{\overrightarrow{D'B'}=\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+0\,\overrightarrow{AA'}}$

CBA'D' est aussi un parallélogramme donc $\boxed{\overrightarrow{A'B}=\overrightarrow{D'C}}$

Or, $\overrightarrow{A'B}=\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA'}$, donc : $\boxed{\overrightarrow{D'C}=\overrightarrow{AB}+0\,\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA'}}$

2. Il suffit de vérifier que $\overrightarrow{AC'}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD'}$, c'est à dire qu'il existe des réels a e b tels que $\overrightarrow{AC'}=a\,\overrightarrow{AB}+b\,\overrightarrow{AD'}$.

Or, **le quadrilatère ABC'D' est un parallélogramme** donc $\boxed{\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD'}}$

Donc, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC'}$ et $\overrightarrow{AD'}$ sont **coplanaires**.