

Exercice

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est un repère de l'espace.

On considère les droites $d_1; d_2$ et d_3 définies par une représentation paramétrique.

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 - 3t_1 \\ y = 5 + t_1 \\ z = 1 + 2t_1 \end{cases} \quad t_1 \in \mathbb{R} \quad d_2 : \begin{cases} x = 9 + 5t_2 \\ y = 4 - t_2 \\ z = 7 + 2t_2 \end{cases} \quad t_2 \in \mathbb{R} \quad d_3 : \begin{cases} x = 1 - 6t_3 \\ y = 2 - 2t_3 \\ z = 1 - 4t_3 \end{cases} \quad t_3 \in \mathbb{R}$$

1. a) Préciser un vecteur directeur de d_1 . Donner les coordonnées de 2 points distincts de d_1 .
b) Mêmes questions pour d_2 .
c) Mêmes questions pour d_3 .
2. a) Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?
b) Même question pour d_1 et d_3 .
c) Même question pour d_2 et d_3 .
3. a) Déterminer la position relative des droites d_1 et d_2 .
b) Même question pour d_1 et d_3 .
c) Même question pour d_2 et d_3 .

Correction :

1. a) $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est **un vecteur directeur** de d_1 .

$A_1(2; 5; 1)$ est **un point** de d_1 . (obtenu pour $t_1=0$)

$B_1(-1; 6; 3)$ est **un point** de d_1 (obtenu pour $t_1=1$)

b) $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est **un vecteur directeur** de d_2 .

$A_2(9; 4; 7)$ est **un point** de d_2 . (obtenu pour $t_2=0$)

$B_2(4; 5; 5)$ est **un point** de d_2 . (obtenu pour $t_2=-1$)

c) $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ est **un vecteur directeur** de d_3 .

$A_2(9; 4; 7)$ est **un point** de d_3 . (obtenu pour $t_3=0$)

$B_3(-11; -2; -7)$ est **un point** de d_3 . (obtenu pour $t_3=2$)

2. a) $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{u}_1 = \lambda \vec{u}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = 5\lambda \\ 1 = -\lambda \\ 2 = 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{3}{5} \\ \lambda = -1 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

Donc les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ **ne sont pas colinéaires** et les droites d_1 et d_2 **ne sont pas parallèles**.

b) $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\vec{u}_1 = \lambda \vec{u}_3 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = 6\lambda \\ 1 = -2\lambda \\ 2 = -4\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ \lambda = -\frac{1}{2} \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_3$ **sont colinéaires** et les droites d_1 et d_3 **sont parallèles**.

c) $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\vec{u}_2 = \lambda \vec{u}_3 \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 6\lambda \\ -1 = -2\lambda \\ 2 = -4\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{5}{6} \\ \lambda = \frac{1}{2} \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc les vecteurs $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ **ne sont pas colinéaires** et les droites d_2 et d_3 **ne sont pas parallèles**.

3. a) Pour déterminer la position relative des droites d_1 et d_2 qui ne sont pas parallèles, il suffit de **déterminer l'intersection des deux droites**.

$$\begin{cases} x = 2 - 3t_1 = 9 + 5t_2 \\ y = 5 + t_1 = 4 - t_2 \\ z = 1 + 2t_1 = 7 + 2t_2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3t_1 + 5t_2 = -7 \quad (1) \\ t_1 + t_2 = -1 \quad (2) \\ 2t_1 - 2t_2 = 6 \quad (3) \end{cases}$$

On considère les 2 équations (2) et (3) :

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -1 \quad (2) \\ t_1 - t_2 = 3 \quad (3) \end{cases}$$

On obtient $2t_1 = 2$ et $2t_2 = -4$ soit $t_1 = 1$ et $t_2 = -2$.

On vérifie dans l'équation (1) :

$$3 \times 1 + 5 \times (-2) = 3 - 10 = -7$$

Conclusion : les droites d_1 et d_2 sont **sécantes en I**. Pour obtenir les coordonnées du point I, il suffit de remplacer t_1 par 1 dans la représentation paramétrique de d_1 ou de remplacer t_2 par -2 dans la représentation paramétrique de d_2 .

$$\begin{cases} x = 2 - 3 \times 1 = -1 \\ y = 5 + 1 = 6 \\ z = 1 + 2 \times 1 = 3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 9 + 5 \times (-2) = -1 \\ y = 4 - (-2) = 6 \\ z = 7 + 2 \times (-2) = 3 \end{cases}$$

Donc $I(-1; 6; 3)$

b) Les droites d_1 et d_3 sont parallèles, pour préciser si ces droites sont strictement parallèles ou confondues, il suffit de déterminer si le point A_2 **appartient à** d_1 ou **n'appartient pas à** d_1 .

$$A_2(9; 4; 7)$$

$$\begin{cases} 9 = 2 - 3t_1 \\ 4 = 5 + t_1 \\ 7 = 1 + 2t_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -\frac{7}{3} \\ t_1 = -1 \\ t_1 = 3 \end{cases}$$

Donc, A_2 **n'appartient pas** à d_1 et donc les droites d_1 et d_2 sont **strictement parallèles**.

c) Les droites d_2 et d_3 **ne sont pas parallèles**, on détermine **leur intersection**

$$\begin{cases} x=9+5t_2=1+6t_3 \\ y=4-t_2=2-2t_3 \\ z=7+2t_2=1-4t_3 \end{cases} \quad \begin{cases} 5t_2-6t_3=-8(1) \\ t_2-2t_3=2(2) \\ 2t_2+4t_3=-6(3) \end{cases}$$

On considère les deux équations (2) et (3) :

$$\begin{cases} t_2-2t_3=2(2) \\ t_2+2t_3=-3(3) \end{cases}$$

On obtient $2t_2=-1$ soit $t_2=-\frac{1}{2}$ et $4t_3=-5$ soit $t_3=-\frac{5}{4}$.

On vérifie dans l'équation (1) :

$$5 \times \left(-\frac{1}{2} \right) - 6 \times \left(-\frac{5}{4} \right) = \frac{-5}{2} + \frac{15}{2} = \frac{10}{2} = 5 \neq -8$$

Donc les droites d_2 et d_3 **ne sont pas sécantes**.

Conclusion : les droites d_2 et d_3 **ne sont pas coplanaires**.