Exercice

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est un repère de l'espace.

On considère les droites d_1 et d_2 définies par une représentation paramétrique :

$$d_1 : \begin{cases} x=-2-2t_1 \\ y=2+3t_1 \\ z=3+2t_1 \end{cases} \quad t_1\in\mathbb{R} \qquad d_2 : \begin{cases} x=2+2t_2 \\ y=-2-t_2 \\ z=-t_2 \end{cases} \quad t_2\in\mathbb{R}$$

1. Démontrer que d_1 et d_2 sont sécantes.
2. Donner une équation cartésienne du plan P contenant d_1 et d_2.

Correction :

1. $\begin{cases} x=-2-2t_1=2+2t_2 \\ y=2+3t_1=-2-t_2 \\ z=3+2t_1=-t_2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2t_1+2t_2=-4(1) \\ 3t_1+t_2=-4(2) \\ 2t_1+t_2=-3(3) \end{cases}$

On considère les équations (1) et (3) :

$\begin{cases} 2t_1+2t_2=-4(1) \\ 2t_1+t_2=-3(3) \end{cases}$

On obtient $t_2=-1$ et $-2t_1=2$ soit $t_1=-1$

On vérifie dans l'équation (2) :

$3\times(-1)+(-1)=-4$

Les droites d_1 et d_2 sont **sécantes en I**. On détermine les coordonnées du point I.

$\begin{cases} x_I=-2-2\times(-1) \\ y_I=2+3\times(-1) \\ z_I=3+2\times(-1) \end{cases}$ $\begin{cases} x_I=0 \\ y_I=-1 \\ z_I=1 \end{cases}$

$\boxed{I(0;-1;1)}$

2. $\vec{u_1}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est **un vecteur directeur** de d_1 .

$\vec{u_2}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est **un vecteur directeur** de d_2 .

d_1 et d_2 sont sécantes en I donc le plan P contenant d_1 et d_2 **est le plan passant par I et de vecteurs directeurs** $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$.

On obtient pour représentation paramétrique de P :

$\begin{cases} x=0-2t+2s(1) \\ y=-1+3t-s(2) \\ z=1+2t-s(3) \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ $s\in\mathbb{R}$

On considère les équations (1) et (3) et on exprime t et s en fonction de x et z .

$\begin{cases} -2t+2s=x \\ 2t-s=z-1 \end{cases}$

On obtient $s=x+z-1$ et $2t=x+2z-2$ soit $t=\frac{1}{2}(x+2z-2)$.

Le point $M(x;y;z)$ appartient au plan P si et seulement si l'équation (2) est vérifiée c'est à dire :

$y=-1+3\times\frac{1}{2}(x+2z-2)-(x+z-1)$

$2y=-2+3(x+2z-2)-2(x+z-1)$

$2y=-2+3x+6z-6-2x-2z+2$

$\boxed{x-2y+4z-6=0}$