Exercice

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est un repère de l'espace.

On considère les droites d_1 et d_2 définies par une représentation paramétrique :

$$d_1 : \begin{cases} x=1+t_1 \\ y=-4+5t_1 \\ z=-1 \end{cases} \quad t_1 \in \mathbb{R} \qquad\qquad d_2 : \begin{cases} x=-1+3t_2 \\ y=-2+15t_2 \\ z=1 \end{cases} \quad t_2 \in \mathbb{R}$$

1. Démontrer que les droites d_1 et d_2 sont strictement parallèles.
2. Donner une équation cartésienne du plan P contenant d_1 et d_2.

Correction :

1. $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}$ est **un vecteur directeur** de d_1.

$\vec{u_2}\begin{pmatrix}3\\15\\0\end{pmatrix}$ est **un vecteur directeur** de d_2.

On remarque que $\vec{u_2}=3\vec{u_1}$

Les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont **colinéaires** donc les droites d_1 et d_2 sont **parallèles**.

$A_2(-1;-2;1)$ est un point de d_2.

On regarde si A_2 appartient à d_1.

$$\begin{cases}-1=1+t_1(1)\\-2=-4+5t_1(2)\\1=-1(3)\end{cases}$$

L'équation (3) n'admet pas de solution donc A_2 **n'appartient pas à** d_1.

Les droites d_1 et d_2 sont donc **strictement parallèles**.

2. $A_1(1;-4;-1)$ est un point de d_1.

P est le plan passant par A_1 et de vecteurs directeurs $\vec{u_1}$ et $\overrightarrow{A_1A_2}$. ($\vec{u_1}$ et $\overrightarrow{A_1A_2}$ ne sont pas colinéaires car A_2 n'appartient pas à d_1)

$\overrightarrow{A_1A_2}\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$

On donne une représentation paramétrique de P.

$$\begin{cases}x=\ \ 1+t-2s(1)\\y=\ \ -4+5t+2s(2)\\z=-1+0t+2s(3)\end{cases}\qquad t\in\mathbb{R}\quad s\in\mathbb{R}$$

On considère les équations (1) et (3)

$$\begin{cases}t-2s=x-1\\2s=z+1\end{cases}$$

On obtient $t=x+z$ et $s=\frac{1}{2}(z+1)$

Le point $M(x;y;z)$ appartient au plan P si et seulement si l'équation (2) est vérifiée.

$$y=-4+5(x+z)+2\times\left(\frac{1}{2}\right)(z+1)$$

$$y=-4+5x+5z+z+1$$

$\boxed{5x-y+6z-3=0}$. **Cette équation est une équation cartésienne de P**.

