Orthogonalité de l'espace.

1. Droites orthogonales de l'espace

1.1. Droites perpendiculaires

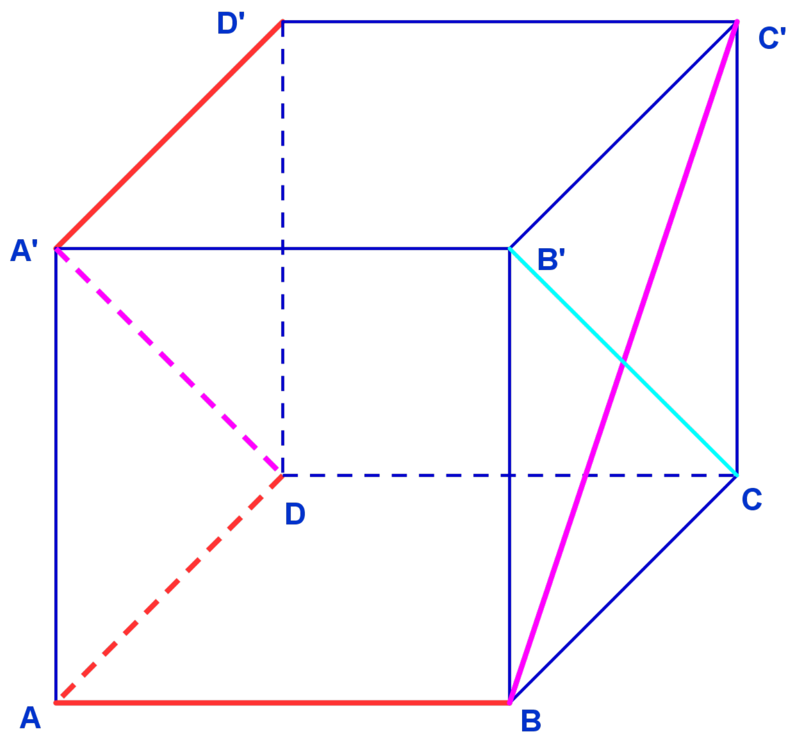
Si deux droites sont perpendiculaires **dans un plan de l'espace**, on dit qu'elles sont perpendiculaires **dans l'espace**.

1.2. Droites orthogonales

On dit que deux droites de l'espace sont **orthogonales** si leurs parallèles issues d'un point quelconque de l'espace sont perpendiculaires.
Si les droites D_1 et D_2 sont orthogonales, on note $D_1 \perp D_2$.

1.3. Exemples

ABCDA'B'C'D' est un cube.



ABCD est un carré donc (AB) et (AD) sont perpendiculaires.
(A'D') est parallèle à (AD) donc (AB) et (A'D') sont orthogonales.

(A'D) et (AD') sont perpendiculaires.

(AD') et (BC') sont parallèles, donc (A'D) et (BC') sont orthogonales.

1.4. Remarque

Si deux droites D_1 et D_2 sont **orthogonales à une même troisième** droite alors D_1 et D_2 **ne sont pas nécessairement parallèles**.

Exemple :

(AB) est orthogonale à (AA').

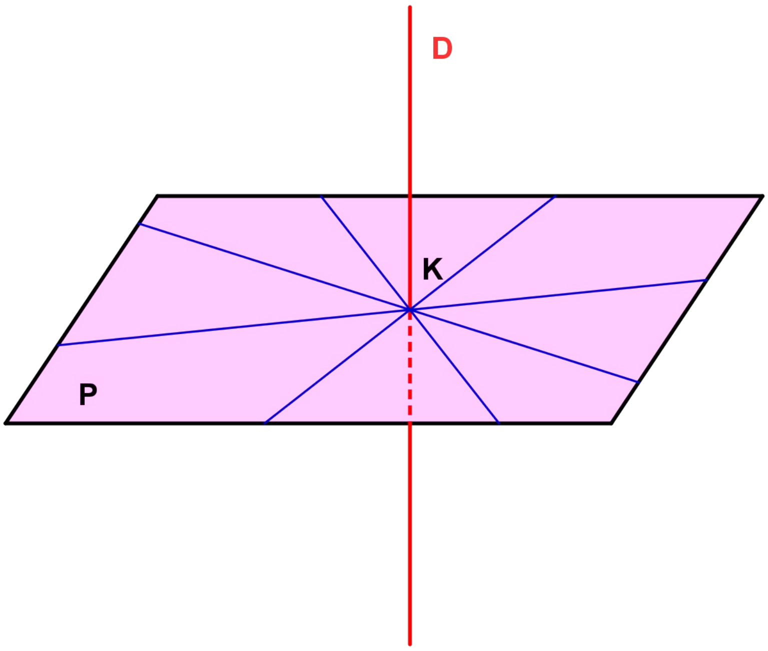
(B'C') est orthogonale à (AA')

Et les droites (AB) et (B'C') ne sont pas coplanaires. (elles ne sont pas coplanaires).

2. Droites orthogonales à un plan

On dit que la droite D est **perpendiculaire** (ou **orthogonale**) au plan $\mathscr{P}$ lorsque D est sécante à $\mathscr{P}$ en K et D est perpendiculaire à toute droite contenue dans $\mathscr{P}$ passant par K.

On note $D \perp \mathscr{P}$.



2.1. Proposition

Proposition :
Si D est **perpendiculaire au plan** $\mathscr{P}$ alors D est **orthogonale à toute droite contenue dans le plan** $\mathscr{P}$.

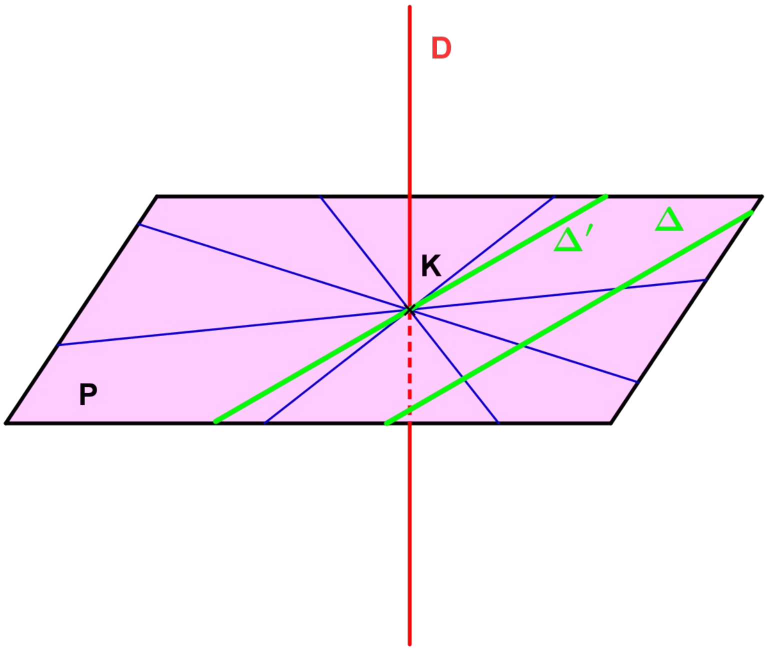
Démonstration

Soit Δ une droite contenue dans $\mathscr{P}$.

On considère la droite Δ' parallèle à Δ passant par K.

Cette droite est contenue dans $\mathscr{P}$ et cette droite est perpendiculaire à D.

Par conséquence, D est orthogonale à Δ'.



2.2. Théorème

Théorème:
La droite D est **perpendiculaire au plan** $\mathscr{P}$ si et seulement la droite D est orthogonale à 2 droites **sécantes** contenues dans le plan $\mathscr{P}$.

On démontrera ce résultat ultérieurement.

Attention :

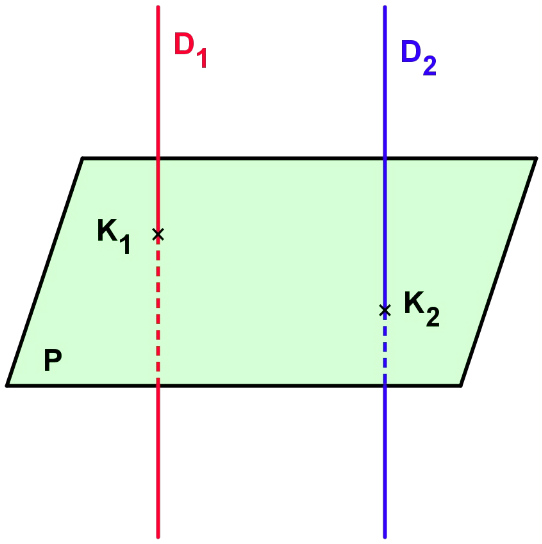
La droite D peut être orthogonale à deux droites parallèles contenues dans le plan $\mathscr{P}$ sans être perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.

Exemple :

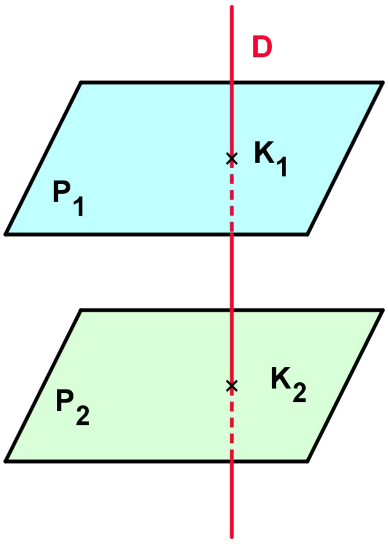
Dans le cube ABCDA'B'C'D', (BC') est perpendiculaire à (AB) et orthogonale à (A'B') mais n'est pas perpendiculaire au plan (ABB').

2.3. Propriétés

Théorème:
Deux droites **perpendiculaires à un même plan** sont parallèles.



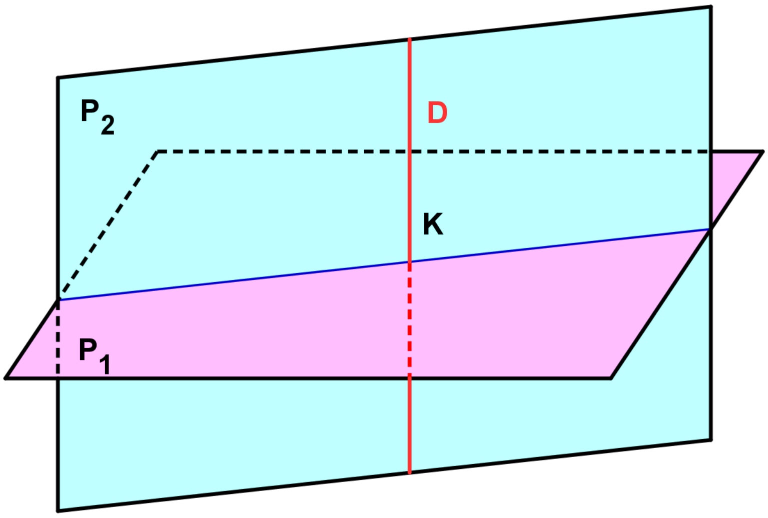
Théorème:
Deux plans **perpendiculaires à un même droite** sont parallèles.



3. Plans perpendiculaires

3.1. Définition

On dit que le plan $\mathscr{P}_1$ est **perpendiculaire** au plan $\mathscr{P}_2$ si et seulement si $\mathscr{P}_2$ contient une droite perpendiculaire à $\mathscr{P}_1$.



3.2. Proposition

Si $\mathscr{P}_1$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}_2$ alors $\mathscr{P}_2$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}_1$ c'est à dire $\mathscr{P}_1$ contient une droite perpendiculaire à $\mathscr{P}_2$.

Démonstration :

Si $\mathscr{P}_1$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}_2$ alors $\mathscr{P}_2$ contient une droite D qui est perpendiculaire à $\mathscr{P}_1$.
D est sécante à $\mathscr{P}_1$ en K.

$\mathscr{P}_1 \neq \mathscr{P}_2$ ($\mathscr{P}_1$ ne contient pas D) et $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ont un point commun K donc $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

Soit Δ la droite d'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

On considère la droite D' perpendiculaire à Δ , contenue dans $\mathscr{P}_1$ passant par K.

D est perpendiculaire à $\mathscr{P}_1$ donc D est perpendiculaire à toute droite contenue dans $\mathscr{P}_1$ passant par K donc D est perpendiculaire à D' .
D' est perpendiculaire à 2 droites sécantes contenue dans $\mathscr{P}_2$: Δ et D donc D' est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}_2$.