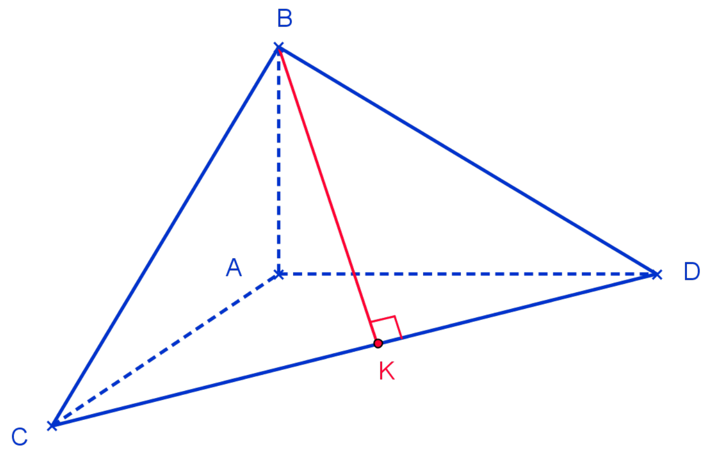
Exercice

ABCD est un tétraèdre trirectangle en A c'est à dire (AB) est perpendiculaire à (AC) ; (AB) est perpendiculaire à (AD) et (AC) est perpendiculaire à (AD). K est le pied de la hauteur du triangle BCD issue de B.



1. Démontrer que les droites (CD) et (AK) sont perpendiculaires.
2. Démontrer que le carré de l'aire du triangle BCD est égale à la somme des carrés des aires des autres faces.

Correction :

1. (AB) est perpendiculaire à (AC) ; (AB) est perpendiculaire à (AD)

Les droites (AC) et (AD) sont sécantes en A.

La droite (AB) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ACD) donc **la droite (AB) est orthogonale au plan (ACD)**.

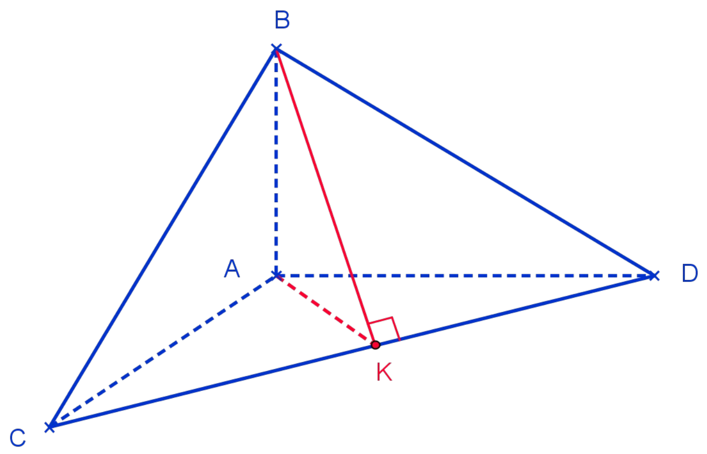
La droite (CD) est contenue dans le plan (ACD) donc **(AB) est orthogonale à (CD).**

(AB) est orthogonale à (CD) ; (BK) est perpendiculaire à (CD)

Les droites (AB) et (BK) sont sécantes en B.

La droite (CD) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABK) donc **la droite (CD) est orthogonale au plan (ABK)**.

La droite (AK) est contenue dans le plan (ABK) donc **(CD) est orthogonale à (AK)**.



2. On note S_{BCD} l'aire du triangle BCD.

$$S_{BCD}=\frac{1}{2}CD\times BK$$

$$S_{BCD}^2=\frac{1}{4}CD^2\times BK^2 \ (1)$$

Le triangle ABK est rectangle en A. (la droite (AB) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ACD) donc la droite (AB) est orthogonale à (AK)).

Donc,

$AB^2+AK^2=BK^2$

Dans (1) :

$$S_{BCD}^2=\frac{1}{4}CD^2\times(AB^2+AK^2)$$

$$S_{BCD}^2=\frac{1}{4}CD^2\times AB^2+\frac{1}{4}CD^2\times AK^2 \ (2)$$

Le triangle ACD est rectangle en A donc $AC^2+AD^2=CD^2$

Dans (2) :

$$S_{BCD}^2 = \frac{1}{4}(AC^2 + AD^2) \times AB^2 + \frac{1}{4} CD^2 \times AK^2$$

$$S_{BCD}^2 = \frac{1}{4} AC^2 \times AB^2 + \frac{1}{4} AD^2 \times AB^2 + \frac{1}{4} CD^2 \times AK^2$$

Le triangle ABC est rectangle en A donc :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \times AB$$

$$S_{ABC}^2 = \frac{1}{4} AC^2 \times AB^2$$

Le triangle ABD est rectangle en A donc :

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AD \times AB$$

$$S_{ABD}^2 = \frac{1}{4} AD^2 \times AB^2$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} CD \times AK$$

$$S_{ACD}^2 = \frac{1}{4} CD^2 \times AK^2$$

Conclusion : $\boxed{S_{BCD}^2 = S_{ABC}^2 + S_{ABD}^2 + S_{ACD}^2}$. Ce résultat est connu sous le nom « théorème de Gua de Malves » ou « théorème de Pythagore de l'espace »