Positions relatives de droites et de plans de l'espace.

1. Règles d'incidence

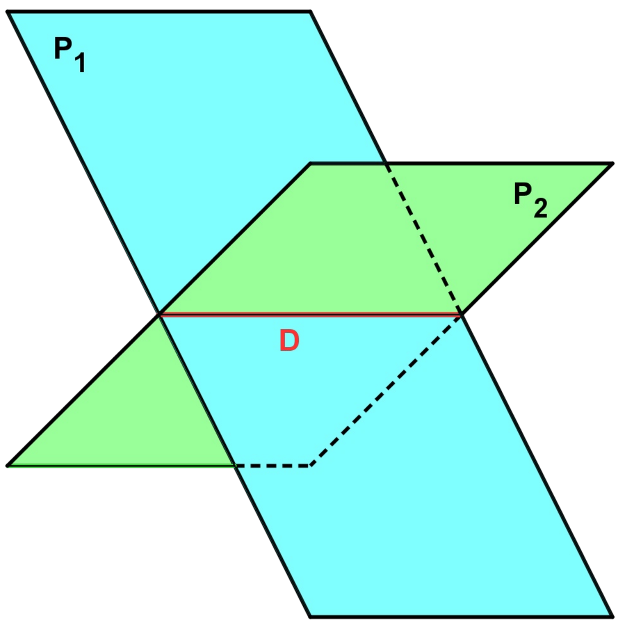
- Il existe une unique droite passant par deux distincts A et B de l'espace que l'on note (AB).
- Il existe un unique plan passant par trois points non alignés A ; B et C de l'espace que l'on note (ABC).
- Si E et F sont deux points distincts d'un plan $\mathscr{P}$ de l'espace alors la droite (EF) est contenue dans le plan $\mathscr{P}$.
- On peut utiliser les théorèmes de géométrie plane dans tout plan de l'espace.

2. Positions relatives de deux plans de l'espace

Deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ de l'espace peuvent être :

1. **confondus**: $\mathscr{P}_1=\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2=\mathscr{P}_1=\mathscr{P}_2$

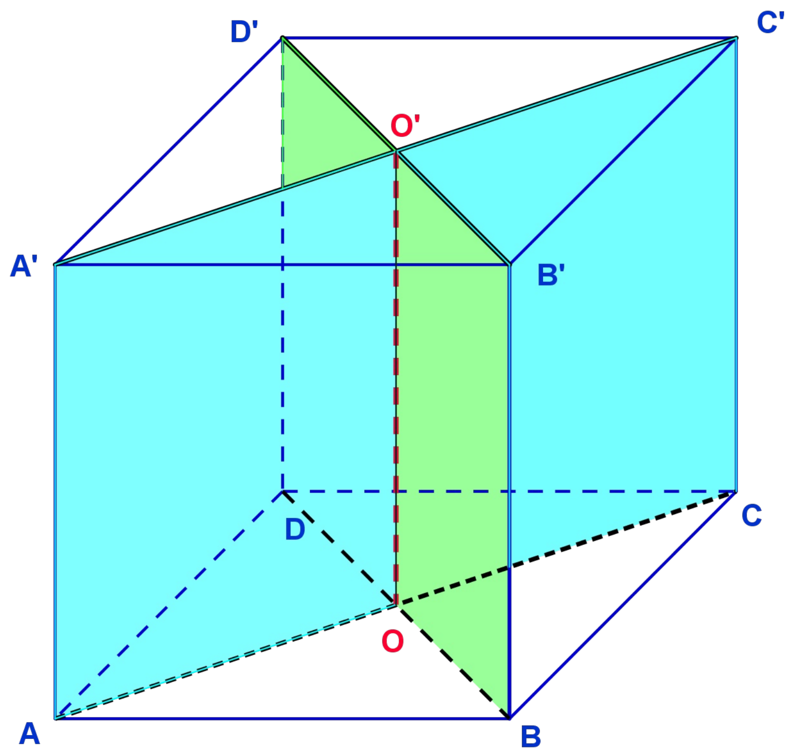
2. **sécants**: leur intersection est alors une droite que l'on note D. $\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2=D$



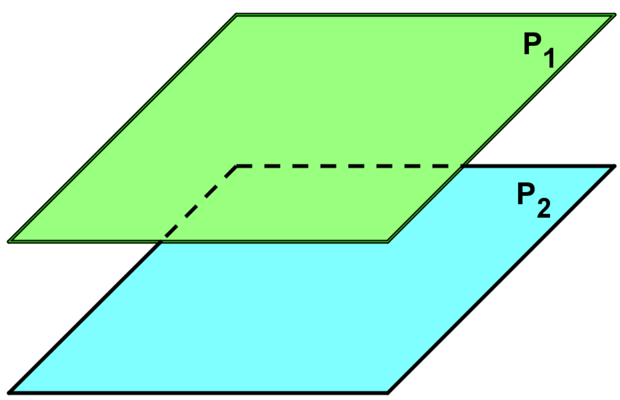
Exemple : On considère le cube ABCDA'B'C'D'. Les plans (ACC') et (BDD') sont sécants.

La droite d'intersection est (OO').

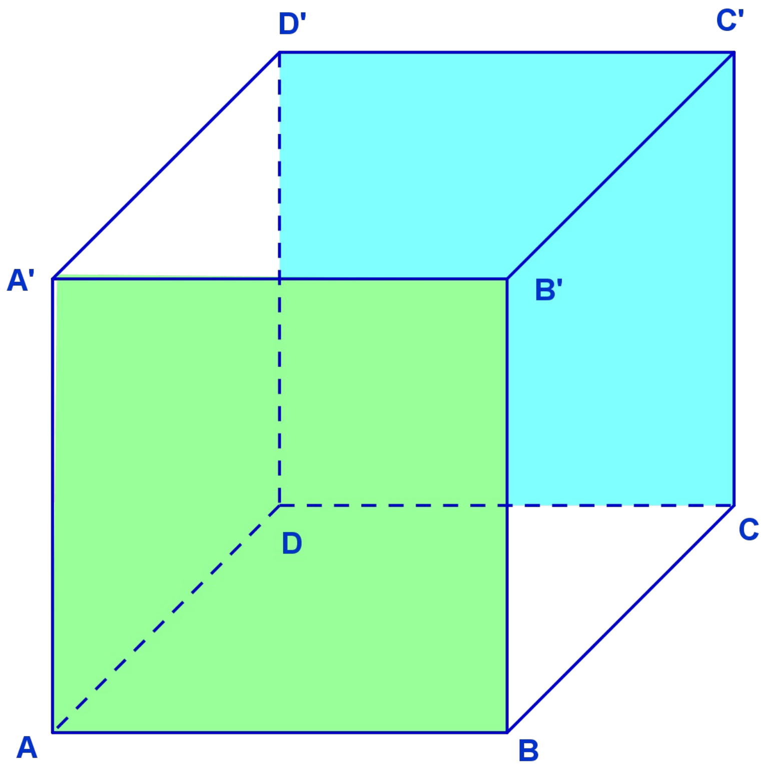
O est le centre du carré ABCD et O' est le centre du carré A'B'C'D'.



2. **strictement parallèles**: $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \varnothing$



Exemple : Dans le cube ABCDA'B'C'D', les plans contenant deux faces opposées sont strictement parallèles donc les plans (ABB') et (DCC') sont strictement parallèles.

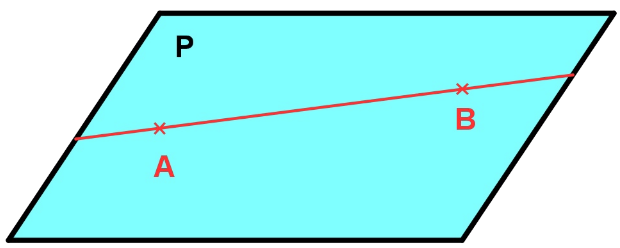


3. Positions relatives d'une droite $\mathscr{D}$ et d'un plan $\mathscr{P}$

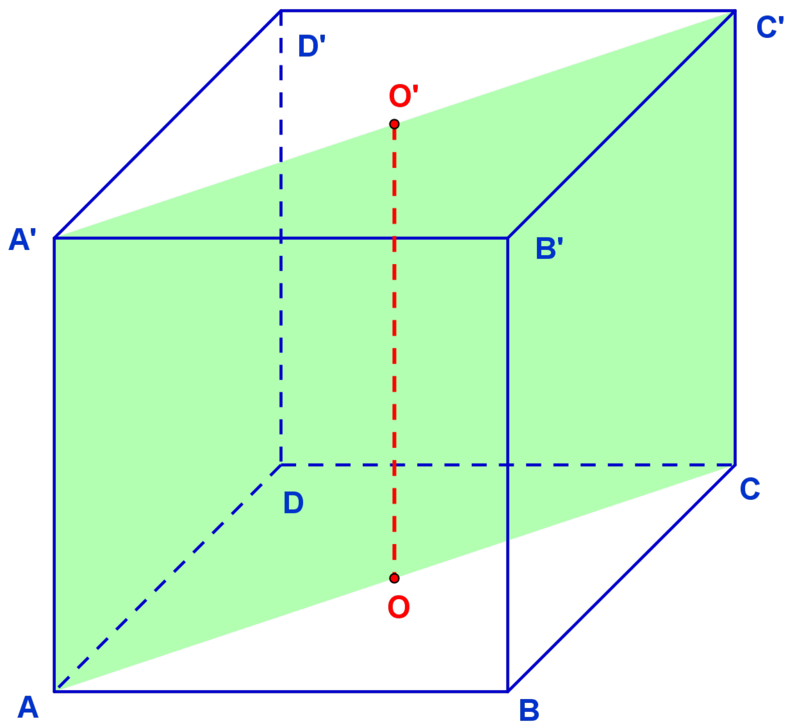
Une droite $\mathscr{D}$ et un plan $\mathscr{P}$ de l'espace peuvent être :

1. La droite $\mathscr{D}$ peut être **contenue** dans le plan $\mathscr{P}$.

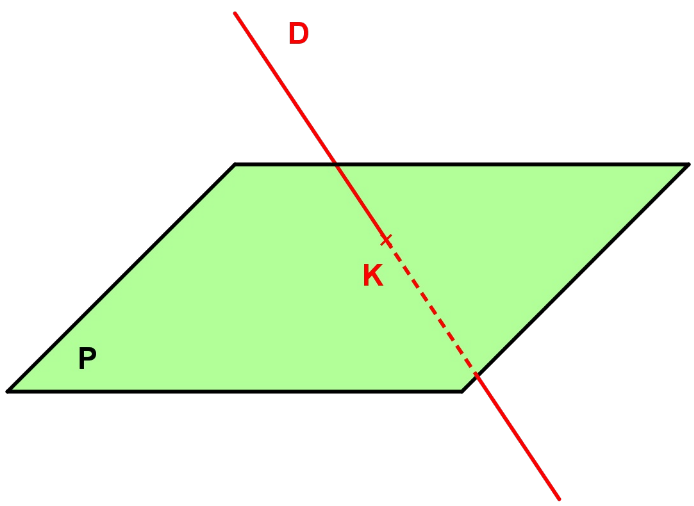
Il suffit que deux points distincts de la droite appartiennent au plan.



Exemple : Dans le cube ABCDA'B'C'D', la droite $\mathscr{D}$=(OO') est contenue dans le plan (ACC').

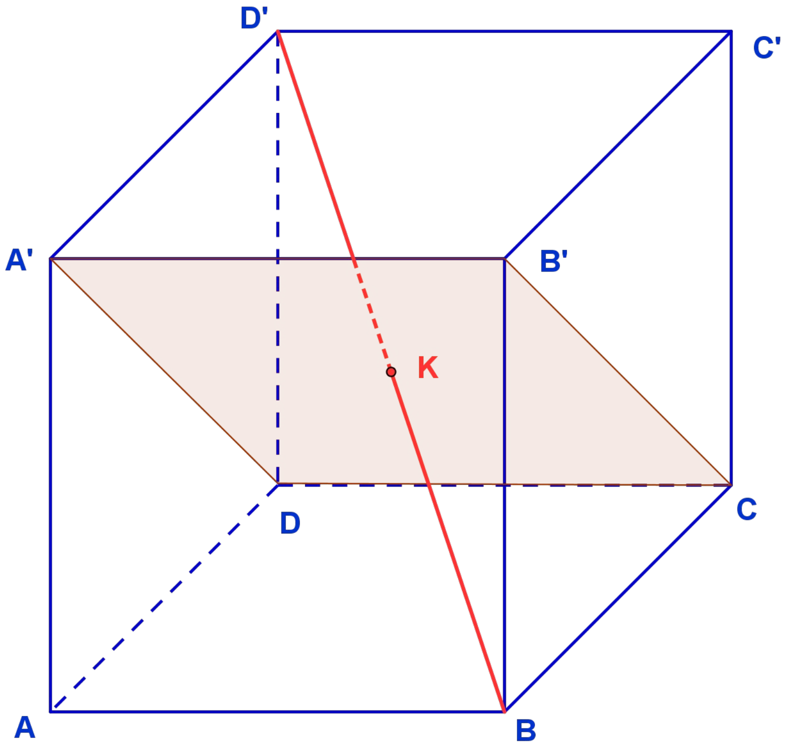


2. La droite $\mathscr{D}$ peut être **sécante** au plan $\mathscr{P}$. Leur intersection est alors un point : $\mathscr{P}\cap\mathscr{D}=\{K\}$.



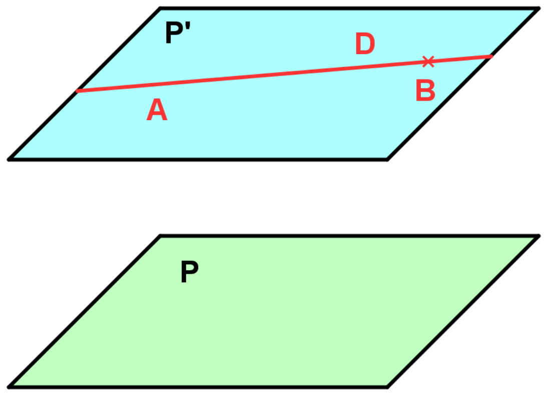
Exemple : Dans le cube ABCDA'B'C'D', la droite $\mathscr{D}$=(BD') est sécante au plan (DCB'). On peut démontrer que

K est le centre du cube.

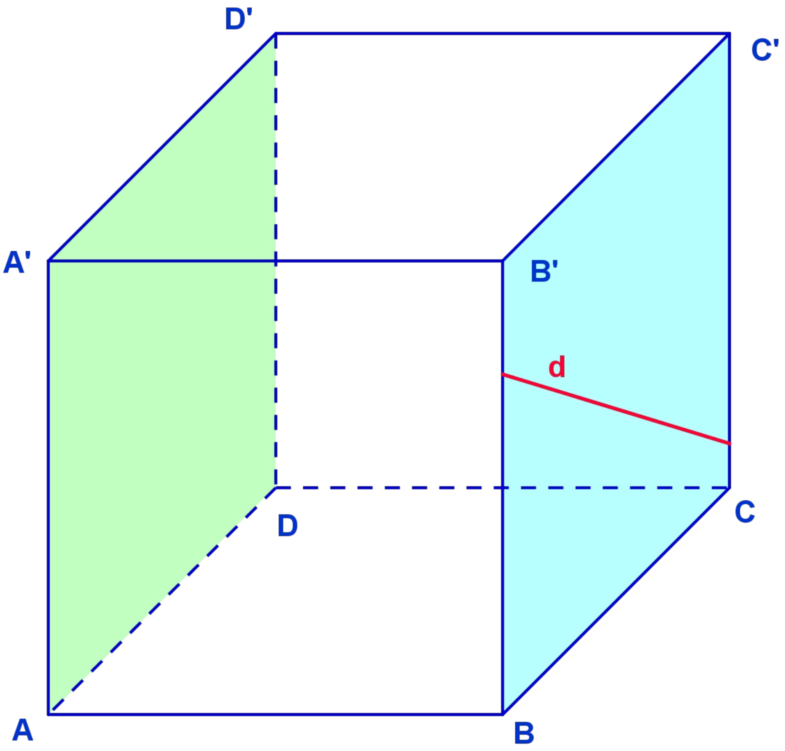


2. La droite $\mathscr{D}$ peut être **strictement parallèle** au plan $\mathscr{P}$ alors : $\mathscr{P}\cap\mathscr{D}=\varnothing$.

La droite $\mathscr{D}$ est alors contenu dans un plan $\mathscr{P}$' strictement parallèle à $\mathscr{P}$.



<u>Exemple :</u> Dans le cube ABCDA'B'C'D', les plans contenant les faces ADD'A' et BCC'B' sont strictement parallèles donc toute droite contenue dans le plan contenant la face BCC'B' est strictement parallèle au plan contenant la face ADD'A' donc la droite d est strictement parallèle au plan contenant la face ADD'A'.

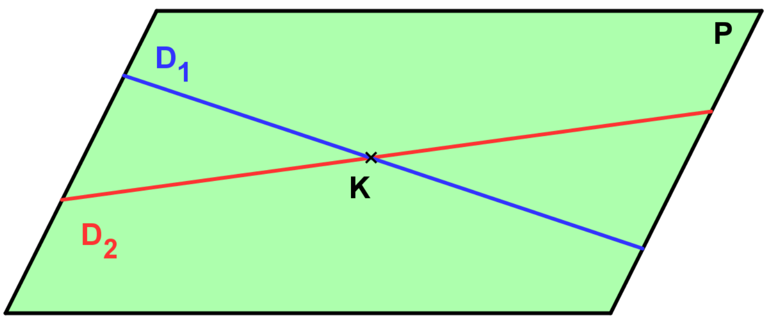


4. Positions relatives de deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ de l'espace

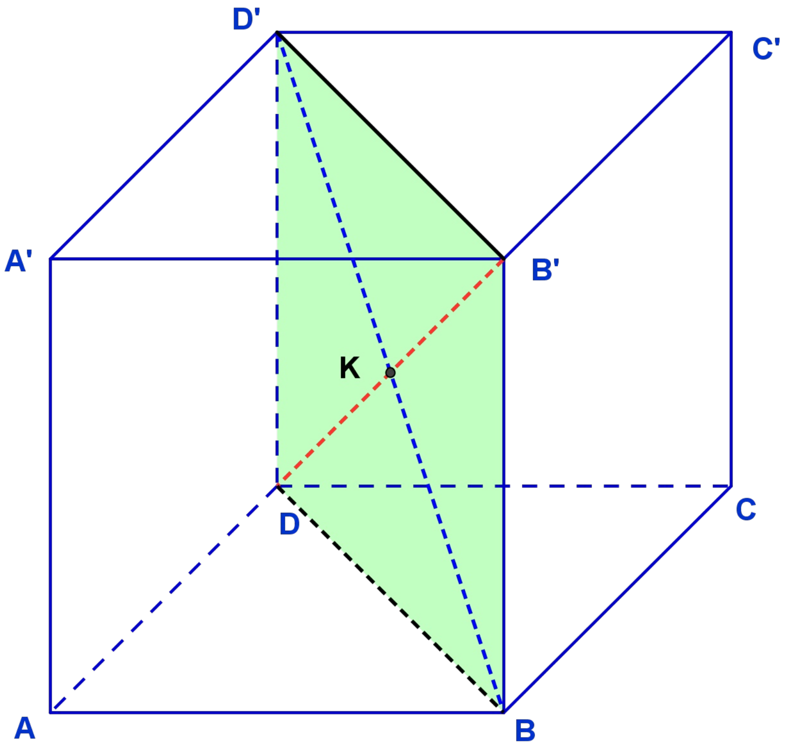
Deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ de l'espace peuvent être :

1. Les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ peuvent être **confondues** . $\mathscr{D}_1=\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2=\mathscr{D}_1=\mathscr{D}_2$.

2. Les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ peuvent être **sécantes**. Leur intersection est alors un point : $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2=\{K\}$.
Il existe alors un unique plan contenant les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.

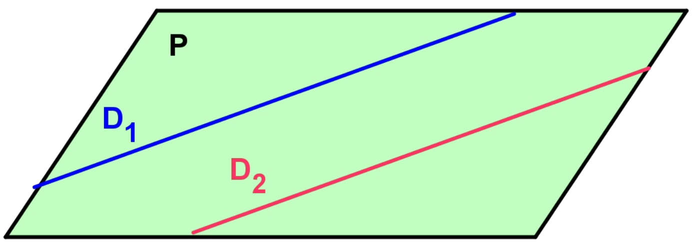


Exemple : Dans le cube ABCDA'B'C'D', $\mathscr{D}_1$=(BD') ; $\mathscr{D}_2$=(B'D) et $\mathscr{P}$=(DBB')

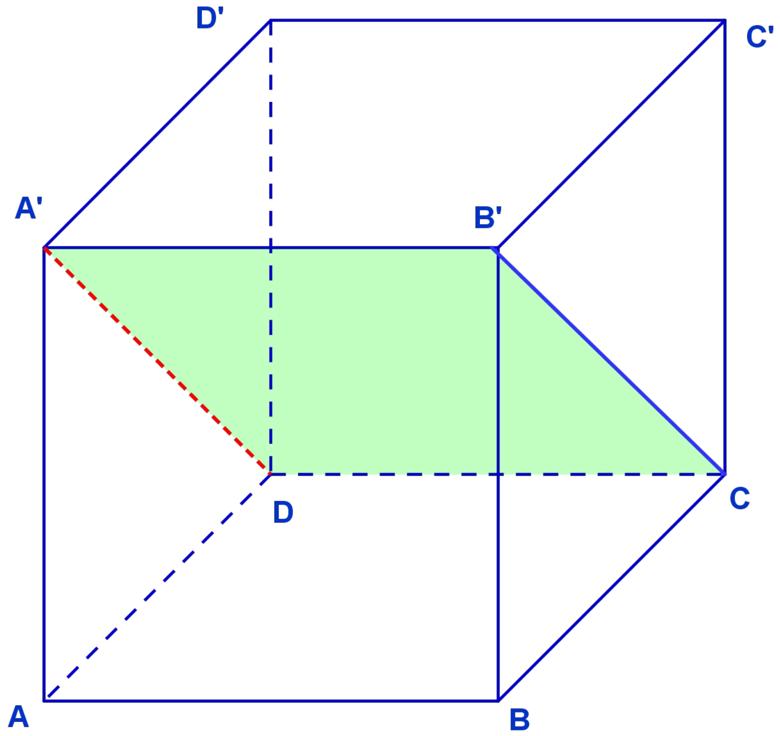


3. Les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ peuvent être **strictement parallèles**. Leur intersection est alors l'ensemble vide : $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2 = \varnothing$.

Il existe un unique plan $\mathscr{P}$ contenant $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.



Exemple : Dans le cube ABCDA'B'C'D', $\mathscr{D}_1$=(B'C) ; $\mathscr{D}_2$=(A'D) sont strictement parallèles.



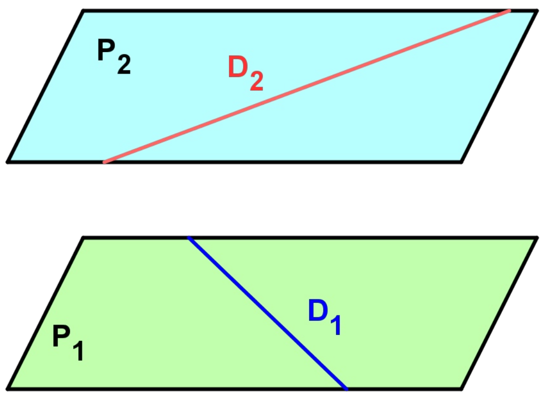
3. Les droite $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ peuvent être **non coplanaires**, c'est à dire qu'il n'existe pas de plan contenant les droites.

$\mathscr{D}_1$ ne $\mathscr{D}_2$ ne sont ni parallèles, ni sécantes et $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2 = \varnothing$.

$\mathscr{D}_1$ est contenue dans le plan $\mathscr{P}_1$.

$\mathscr{D}_2$ est contenue dans le plan $\mathscr{P}_2$.

Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ étant strictement parallèles.

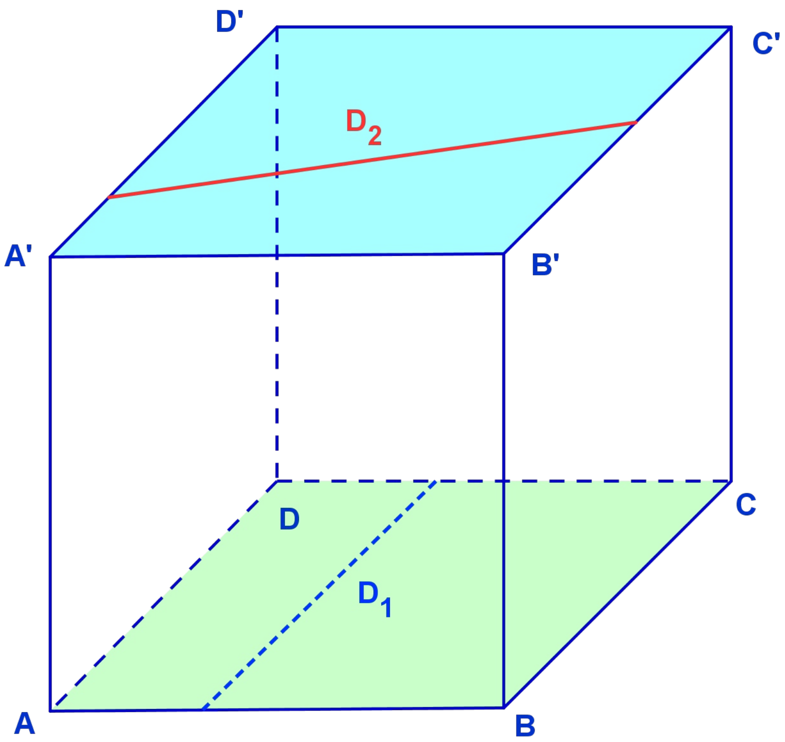


Exemple : Dans le cube ABCDA'B'C'D', les plans (ABC) et (A'B'C') sont strictement parallèles.

$\mathscr{D}_1$ est contenue dans le plan (ABC)

$\mathscr{D}_2$ est contenue dans le plan (A'B'C')

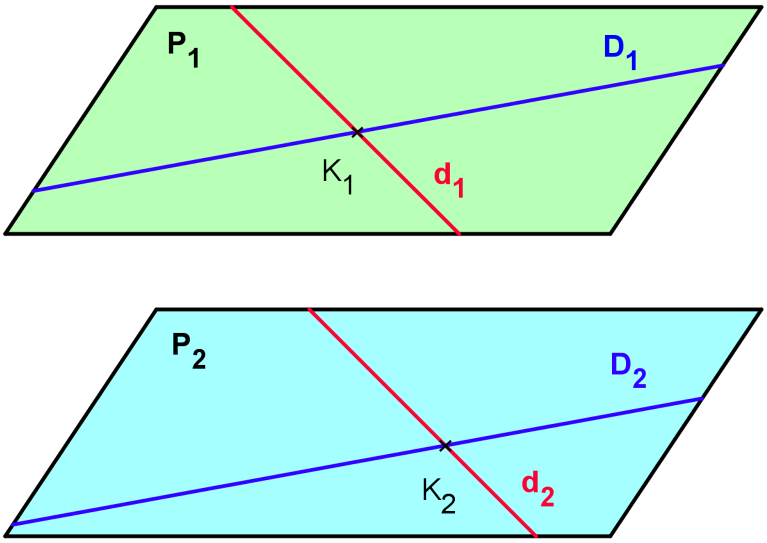
$\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ne sont pas coplanaires.



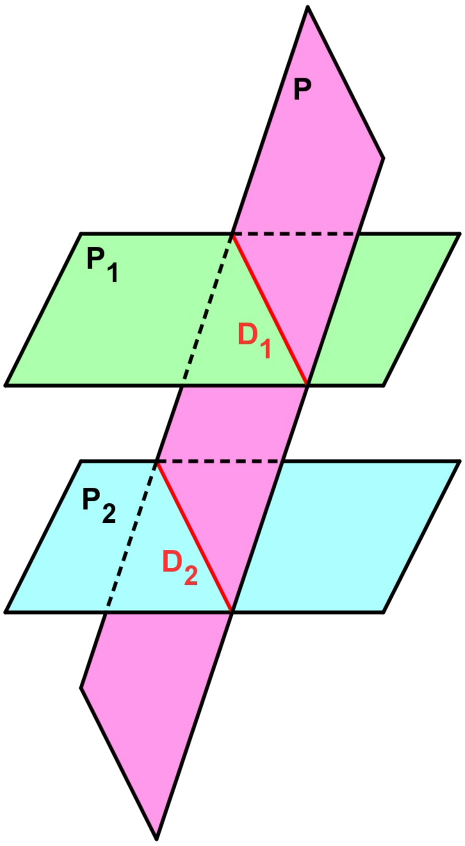
5. Parallélisme entre plans

Si deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles à un même troisième $\mathscr{P}_3$ alors et sont parallèles entre eux.
Si $\mathscr{P}_1 // \mathscr{P}_3$ et $\mathscr{P}_2 // \mathscr{P}_3$ alors $\mathscr{P}_1 // \mathscr{P}_2$.

Si deux droites sécantes d_1 et D_1, contenues dans le plan $\mathscr{P}_1$ sont parallèles à deux droites sécantes d_2 et D_2, contenues dans le plan $\mathscr{P}_2$ alors les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles.



Si deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont strictement parallèles alors tout plan $\mathscr{P}$ sécant à l'un est sécant à l'autre et les deux droites d'intersection sont parallèles.



Démonstration :

- Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}_1$ ne sont pas sécants alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}_1$ sont parallèles et comme $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont strictement parallèles donc $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles.

Par contraposée, si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}_1$ sont sécants.

- On appelle D_1 la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}_1$.

  On appelle D_2 la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}_2$.

  D_1 est contenue dans $\mathscr{P}_1$ et D_2 est contenue dans $\mathscr{P}_2$. Or, $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont strictement parallèles donc $D_1 \cap D_2 = \varnothing$.

  D'autre part, D_1 et D_2 sont contenues dans $\mathscr{P}$, les droites D_1 et D_2 sont coplanaires donc D_1 et D_2 sont parallèles.

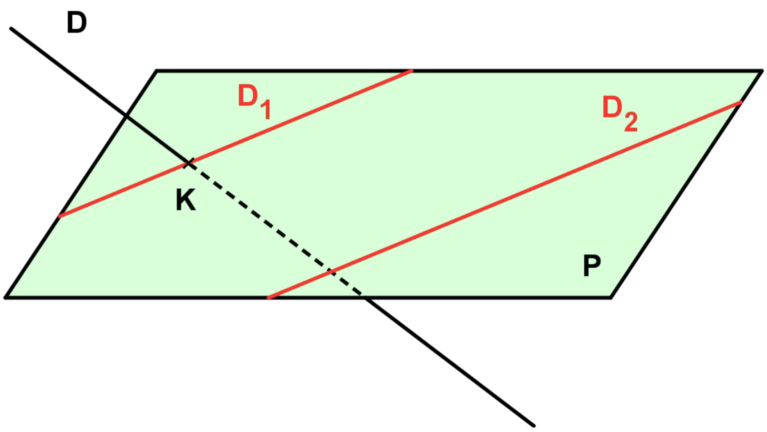
6. Parallélisme entre droites

Si deux droites sont parallèles à un même troisième alors elles sont parallèles entre elles.
Si $D_1 // D_3$ et si $D_2 // D_3$ alors $D_1 // D_2$

Attention, les droites D_1 ; D_2 et D_3 ne sont pas nécessairement contenues dans un même paln.

Si deux droites sont parallèles alors tout plan sécant avec l'une est sécant avec l'autre.

Attention : si deux droites sont parallèles alors toute droite sécante avec l'une n'est pas nécessairement sécante avec l'autre.



D_1 et D_2 sont deux droites strictement parallèles contenues dans le plan $\mathscr{P}$. D est une droite sécante à D_1 et à $\mathscr{P}$ en K.

Les droites D et D_2 ne sont pas coplanaires.

7. Parallélisme entre droite et plan

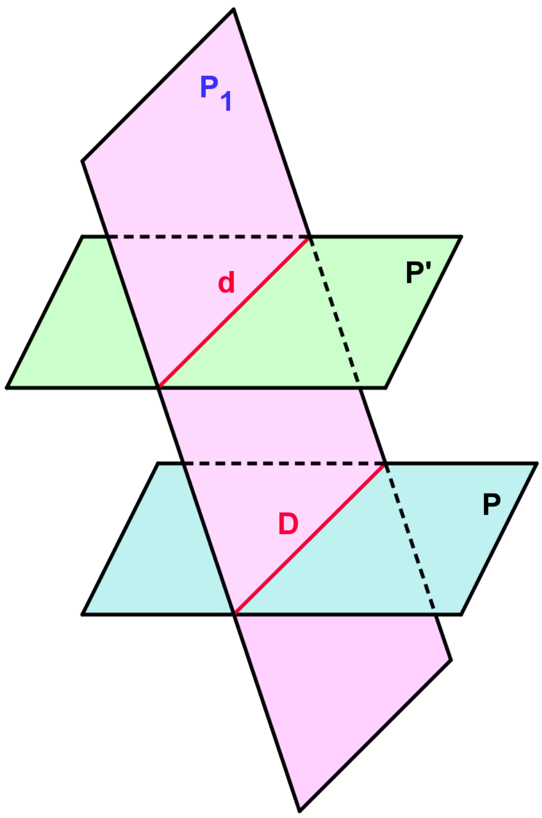
Si une droite d est strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$ alors il existe une droite D contenue dans le plan $\mathscr{P}$ parallèle à d.

Démonstration

d est contenue dans le plan $\mathscr{P}'$ strictement parallèle à $\mathscr{P}$.

On considère un plan $\mathscr{P}_1$ contenant d et sécant à $\mathscr{P}'$.

Le plan $\mathscr{P}_1$ est donc sécant avec $\mathscr{P}$, on note D la droite d'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}$. On a donc les droites d et D parallèles.



Si une droite d est parallèle à une droite D contenue dans le plan $\mathscr{P}$ alors d est parallèle à $\mathscr{P}$.

Démonstration

- S'il existe un point K appartenant à d et $\mathscr{P}$ alors alors d est la parallèle à D passant par K et d est contenue dans $\mathscr{P}$.
- S'il n'existe pas de point appartenant à d et à $\mathscr{P}$ alors d est strictement parallèle à $\mathscr{P}$.

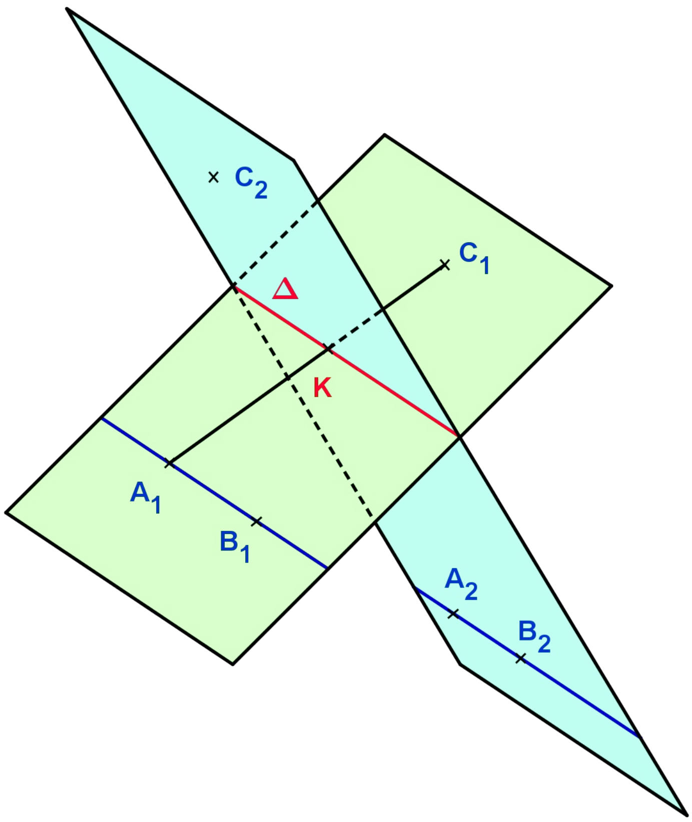
Théorème :

La droite d est parallèle au plan $\mathscr{P}$ si et seulement s'il existe une droite D parallèle à d contenue dans $\mathscr{P}$.

8. Théorème du toit

Si D_1 et D_2 sont deux droites parallèles et si D_1 est contenue dans le plan $\mathscr{P}_1$ et si D_2 est contenue dans le plan $\mathscr{P}_2$ et si les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants alors la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ est parallèles à D_1 et D_2 .

Démonstration



$D_1=(A_1 B_1)$. Soit $C_1 \in \mathscr{P}_1$ et $C_1 \notin D_1$. $\mathscr{P}_1=(A_1 B_1 C_1)$

$D_2=(A_2 B_2)$. Soit $C_2 \in \mathscr{P}_2$ et $C_2 \notin D_2$. $\mathscr{P}_2=(A_2 B_2 C_2)$

On considère la droite $(A_1 C_1)$ contenue dans la plan $\mathscr{P}_1$.

Si cette droite était parallèle au plan $\mathscr{P}_2$ alors elle serait parallèle à une droite contenue dans $\mathscr{P}_2$.

Alors, 2 droites sécantes contenues dans $\mathscr{P}_1$ seraient parallèles à 2 droites sécantes contenues dans $\mathscr{P}_2$ donc $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ seraient parallèles.

Par contraposée, si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants alors (A_1C_1) est sécante à $\mathscr{P}_2$.

On note K le point d'intersection de $\mathscr{P}_2$ et (A_1C_1) .

Δ est la parallèle à (A_1B_1) passant par K.

K$\in\mathscr{P}_1$ donc Δ est contenue dans $\mathscr{P}_1$.

K$\in\mathscr{P}_2$ donc Δ est contenue dans $\mathscr{P}_2$.

Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants donc Δ est la droite d'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$

Or, Δ est parallèle à D_1 (donc à D_2)

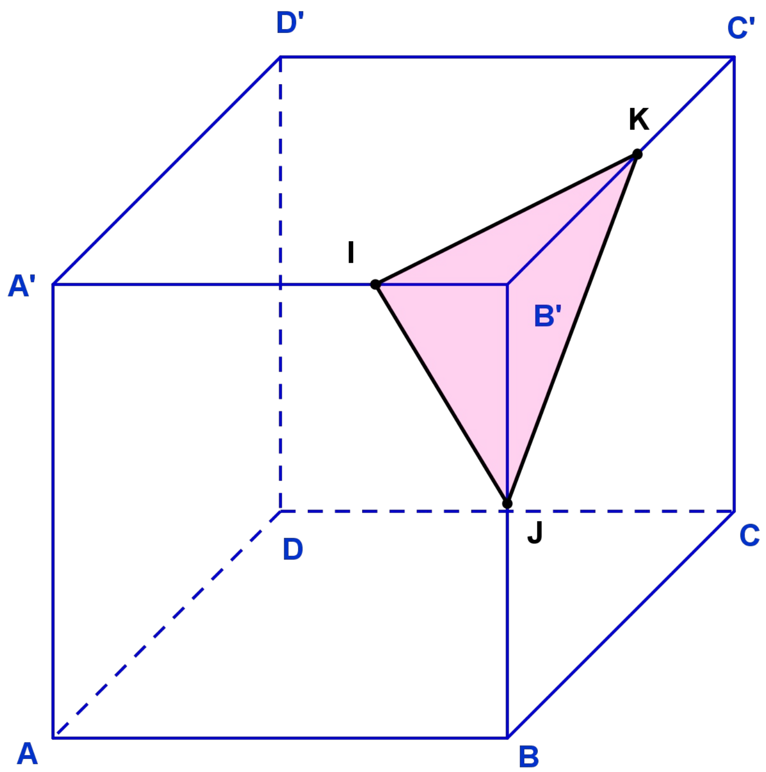
9. Exemples de section d'un cube par un plan

On considère le cube ABCDA'B'C'D' et le plan (IJK). Pour simplifier les constructions, on choisit les points I ; J et K appartenant aux arêtes du cube.

Sur les différentes figures, on laisse apparent les traits de construction des polygones obtenus. On donne des exemples où le plan (IJK) coupe 3 faces du cube ou 4 faces du cube ou 5 faces du cube ou 6 faces du cube.

9.1. Exemple 1

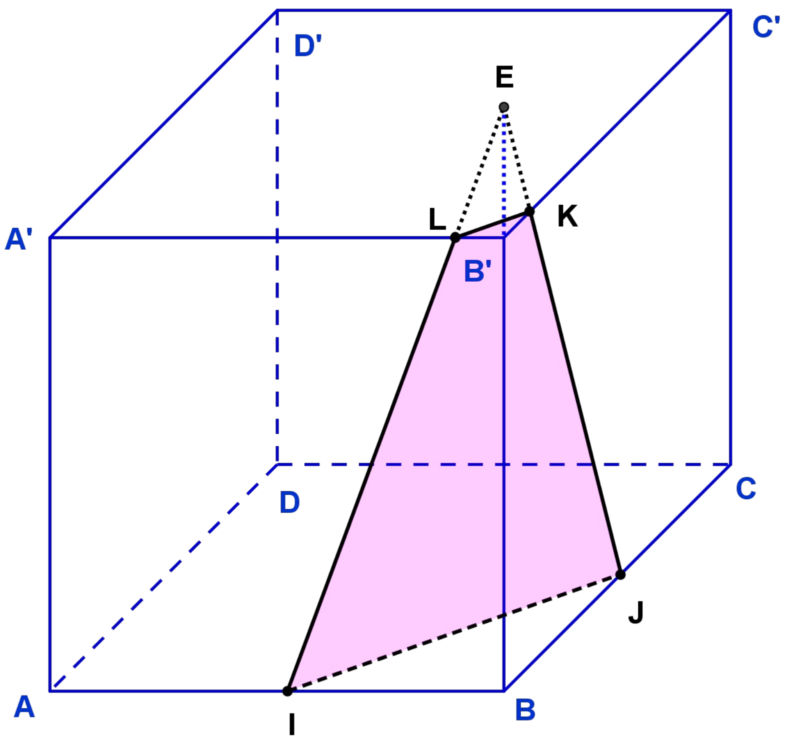
Le plan (IJK) ne coupe que 3 faces du cube.



On obtient le triangle IJK.

9.2. Exemple 2

Le plan (IJK) ne coupe que 4 faces du cube.



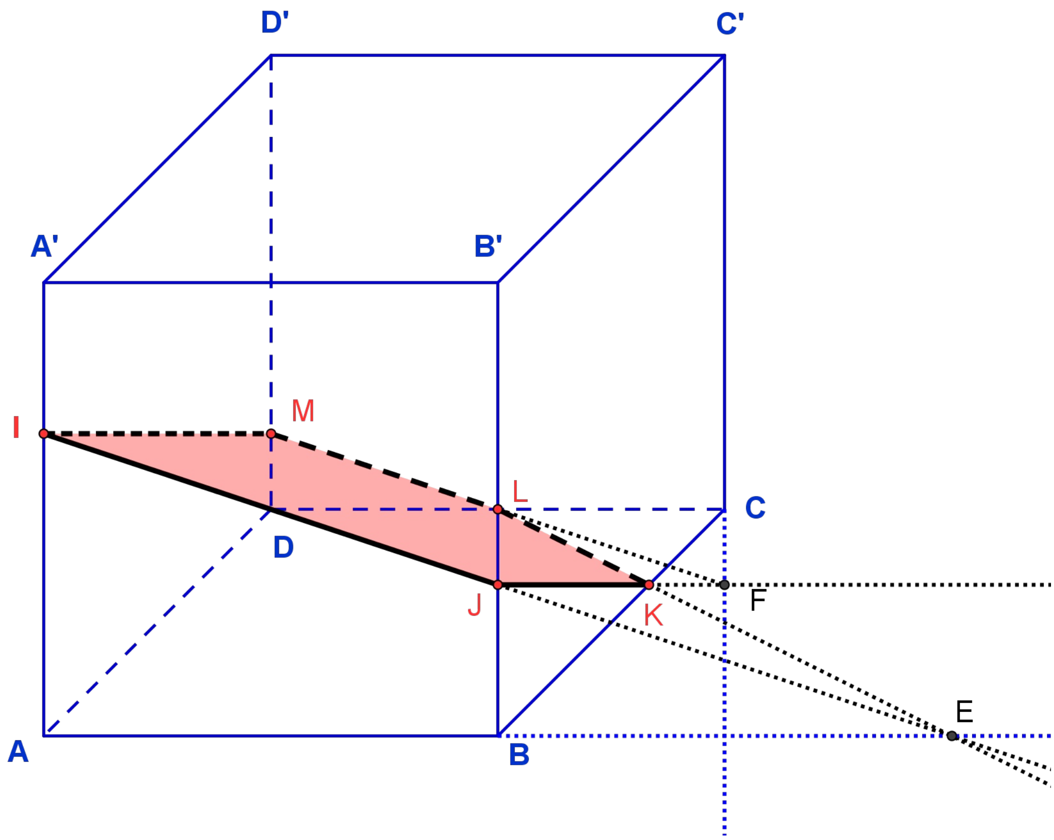
Les droites (JK) et (BB') sont sécantes en E et (EI) coupe (A'B') en L.

Les faces opposées sont contenues dans des plans strictement parallèles, ici ABCD et A'B'C'D' donc les droites (IJ) et (LK) sont parallèles.

Le quadrilatère IJKL est un trapèze.

9.3. Exemple 3

Le plan (IJK) coupe 5 faces du cube.



(IJ) coupe (AB) en E et (EK) coupe (CD) en L.

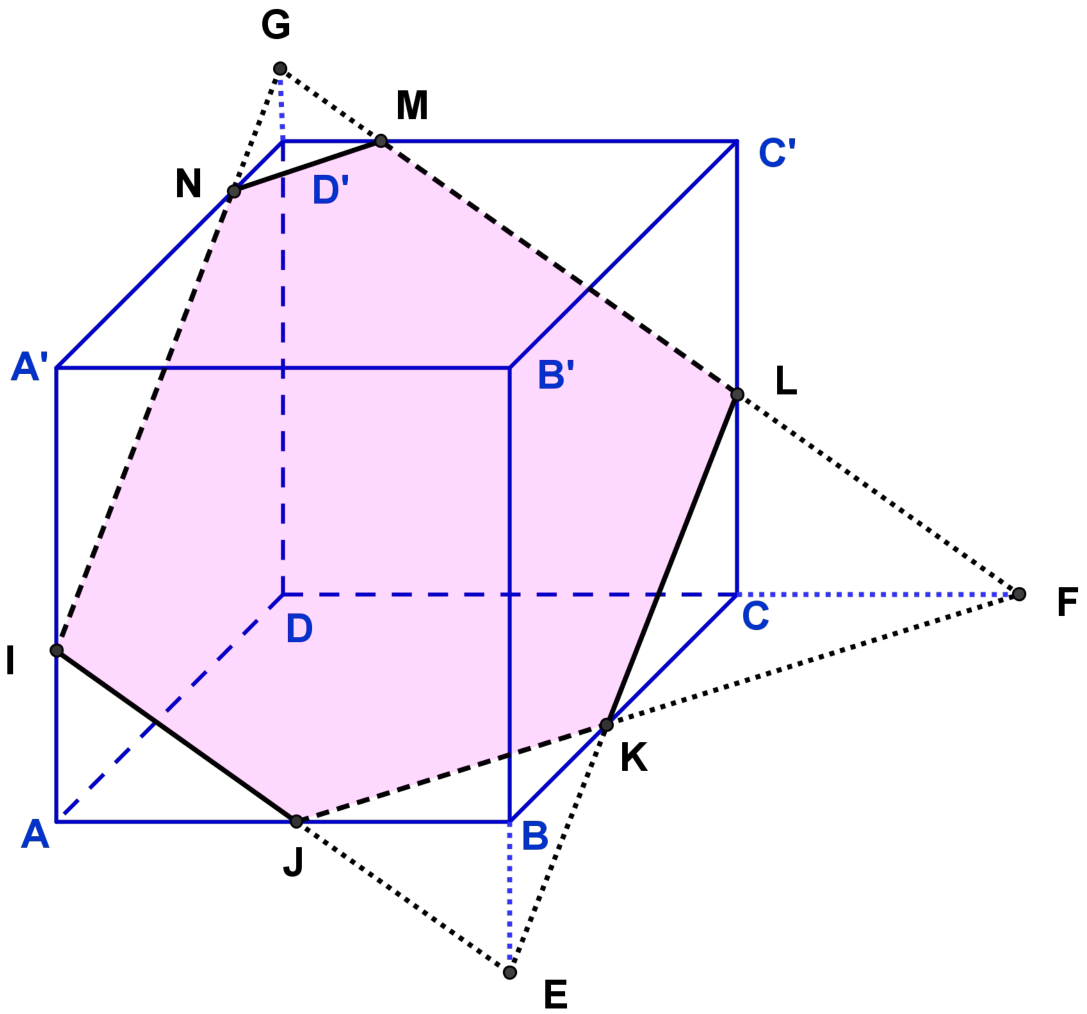
(JK) coupe (CC') en F et (FL) coupe (DD') en M.

On obtient le pentagone IJKLM

Les droites (IJ) et (LM) sont parallèles. De même les droites (JK) et (IM) sont parallèles.

9.4. Exemple 4

Le plan (IJK) coupe les 6 faces du cube.



(IJ) et (BB') sont sécantes en E.
(EK) et (CC') sont sécantes en L.
(JK) et (CD) sont sécantes en F.
(FL) et (C'D') sont sécantes en M.
(FL) et (DD') sont sécantes en N.
On obtient l'hexagone IJKLMN

Les droites (IJ) et (LM) sont parallèles.

Les droites (JK) et (MN) sont parallèles.

Les droites (LK) et (IN) sont parallèles.