Produit scalaire de l'espace.

Applications.

1. Produit scalaire de l'espace..... p2
2. Équations cartésienne d'un plan..... p4
3. Perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires..... p9

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

1. Produit scalaire de l'espace

1.1. Introduction

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On choisit A un point de l'espace et les points B et C sont déterminés de manière unique par $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

- Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, le plan $P=(ABC)$ est l'unique plan contenant A ; B et C.
- Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, il existe une infinité de plans contenant les trois points : A ; B et C.
- Le produit scalaire dans l'espace des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal au produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans le plan P.
- On admet que le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne dépend pas du point A.

1.2. Définition

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace. On nomme **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ égal à :

- 0 si l'un au moins des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul.
- $\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos(\vec{u};\vec{v})$ si les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls. (l'angle $(\vec{u};\vec{v})$ est l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ dans le plan P contenant A;B et C.

1.3. Propriétés

Pour tous vecteurs de l'espace $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout nombre réel k , on a :

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$
- $(k\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(k\vec{v})=k\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Pour tous vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

- $\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$
- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2(\vec{u}\cdot\vec{v})+\|\vec{v}\|^2$ et $(\vec{u}\cdot\vec{v})=\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)$
- $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2(\vec{u}\cdot\vec{v})+\|\vec{v}\|^2$ et $(\vec{u}\cdot\vec{v})=\frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}+\vec{v}\|^2)$

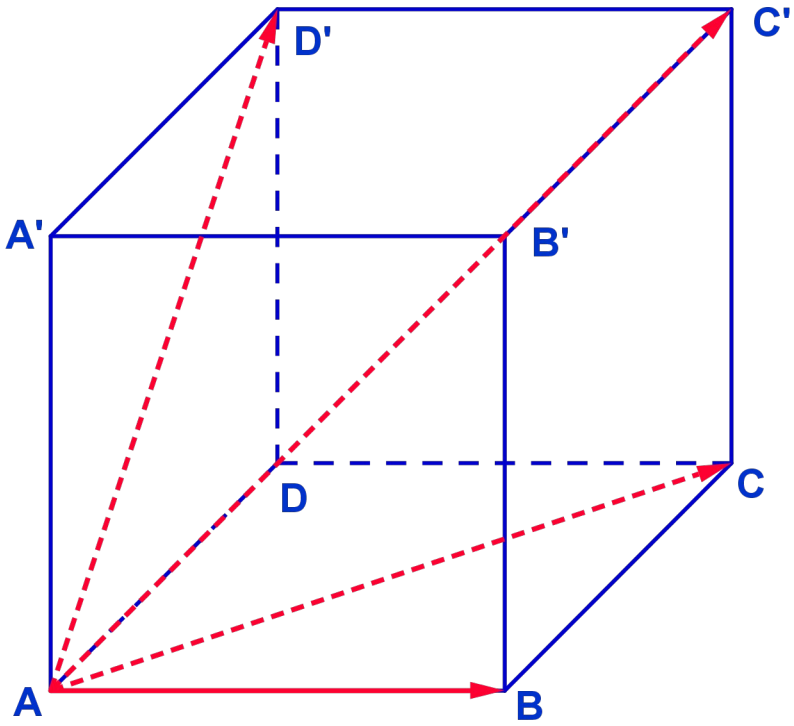
$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$ et $\|\vec{u}\|^2=x^2+y^2+z^2$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

1.4. Exemples

ABCDA'B'C'D' est un cube et $AB=a$ (a est un réel strictement positif).



Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Calculer les produits scalaires suivants :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC'}$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD'}$

P=(ABC)
B est le projeté orthogonal de C sur (AB), donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB^2}=\|\overrightarrow{AB}\|^2=AB^2=a^2$.

P=(ACC')
C est le projeté orthogonal de C' sur (AC), donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC^2}=\|\overrightarrow{AC}\|^2=AC^2=(\sqrt{2}\,a)^2=2a^2$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CC'}$
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CC'}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CC'}=0$
Donc, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=a^2$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD'}=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}+0=a^2$

Pour calculer les produits scalaires demandés, on peut aussi utiliser un repère orthonormé.

2. Équation cartésienne d'un plan

2.1. Démonstration d'une propriété

Propriété : Si une droite D est **orthogonale à deux droites sécantes** contenues dans le plan P alors la droite D est **orthogonale à toute droite contenue dans le plan P**.

Démonstration :

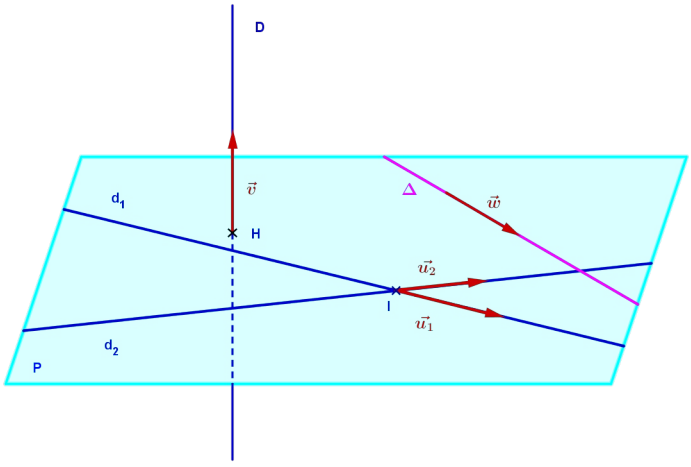
d_1 et d_2 sont deux droites sécantes en I contenues dans le plan P.

$\vec{u_1}$ est un vecteur directeur de d_1 .

$\vec{u_2}$ est un vecteur directeur de d_2 .

$\vec{v}$ est un vecteur directeur de D.

D est orthogonale à d_1 et d_2 , donc $\vec{u_1}\cdot\vec{v}=0$ et $\vec{u_2}\cdot\vec{v}=0$



Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Soit Δ une droite contenue dans P. $\vec{w}$ est un vecteur directeur de Δ .

Les vecteurs $\vec{u_1};\vec{u_2}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires (car les droites d_1 et d_2 sont sécantes) donc $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$.

C'est à dire, il existe deux réels a et b tels que $\vec{w}=a\vec{u_1}+b\vec{u_2}$

$\vec{w}\cdot\vec{v}=(a\vec{u_1}+b\vec{u_2})\cdot\vec{v}=(a\vec{u_1})\cdot\vec{v}+(b\vec{u_2})\cdot\vec{v}=a(\vec{u_1}\cdot\vec{v})+b(\vec{u_2}\cdot\vec{v})=a\times0+b\times0=0$

Donc les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et les droites Δ et D sont orthogonales.

2.2. Définition

P est le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

On nomme **vecteur normal** au plan P tout vecteur non nul $\vec{n}$ orthogonal à tout vecteur du plan P.

2.3. Remarque

$\vec{n}$ est un vecteur normal au plan P su et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

2.4. Détermination de l'ensemble des vecteurs normaux à un plan

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace.

a) *Exemple 1*

P est le plan passant par $A(x_0;y_0;z_0)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix}$.

On vérifie que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

$$\vec{u}=\lambda\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}1=5\lambda\\-2=2\lambda\\3=-\lambda\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=\frac{1}{5}\\\lambda=-1\\\lambda=-3\end{cases}$$

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est normal au plan P si et seulement si :

$\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ et $\vec{n}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}a-2b+3c=0\\5a+2b-c=0\end{cases}$

On doit résoudre un système de 2 équations à 3 inconnues.

Pour cela, la méthode est de choisir 2 inconnues et la troisième joue le rôle de paramètre.

$\begin{cases}a-2b=-3c\\5a+2b=c\end{cases}$

On obtient $6a=-2c$ soit $a=-\frac{1}{3}c$ et $12b=16c$ soit $b=\frac{16}{12}c=\frac{4}{3}c$.

$\vec{n_c}\left(-\frac{1}{3}c;\frac{4}{3}c;c\right)$

Pour $c=0$, on obtient le vecteur nul.

L'ensemble des vecteurs normaux au plan P est l'ensemble des vecteurs non nuls colinéaires au vecteur $\vec{N}\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3};1\right)$.

Pour $c=3$, $\vec{n_3}(-1;4;1)$ est un vecteur normal au plan P.

Il n'est pas nécessaire de connaître les coordonnées du point A pour déterminer les vecteurs normaux à P.

b) *Exemple 2*

P est le plan passant par $A(x_0;y_0;z_0)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\-2\\5\end{pmatrix}$.

On vérifie que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

$\vec{u}=\lambda\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases}2=-4\lambda\\1=-2\lambda\\-2=5\lambda\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=-\frac{1}{2}\\\lambda=-\frac{1}{2}\\\lambda=-\frac{2}{5}\end{cases}$

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

$\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est normal au plan P si et seulement si :

$\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ et $\vec{n}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}2a+b-2c=0\\-4a-2b+5c=0\end{cases}$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

On ne peut pas choisir a et b pour inconnues et les exprimer en fonction de c, mais on peut choisir a et c comme inconnues et b comme paramètre.

$\begin{cases} 2a-2c=-b \\ -4a+5c=2b \end{cases}$

On obtient $c=0$ et $a=-\frac{1}{2}b$

$\vec{n_b}\left(-\frac{1}{2}b;b;0\right)$

Pour $b=0$, on obtient le vecteur nul.

L'ensemble des vecteurs normaux au plan P est l'ensemble des vecteurs non nuls colinéaires au vecteur $\vec{N}\left(-\frac{1}{2};1;0\right)$.

Pour $b=2$, $\vec{n_2}(-1;2;0)$ est un vecteur normal au plan P.

On admet qu'il existe une infinité de vecteurs normaux à un plan donné et que tous ces vecteurs sont colinéaires.

2.5. Équation cartésienne d'un plan

a) *Remarque*

Soit $\vec{n}$ un vecteur normal au plan P passant par A.

M appartient au plan P si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$

b) *Théorème*

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace.

Si $\vec{i}$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ alors **une équation cartésienne du plan P** est une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$ (avec d nombre réel).

Démonstration :

$A(x_0;y_0;z_0)$ et $M(x;y;z)$

M appartient au plan P si et seulement si :

$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$\Leftrightarrow ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)=0$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

On pose $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$

$\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$

c) *Réciproquement*

$a\in\mathbb{R}$; $b\in\mathbb{R}$; $c\in\mathbb{R}$; $d\in\mathbb{R}$

Si $a\neq 0$ ou $b\neq 0$ ou $c\neq 0$ alors :

L'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ est **un plan de vecteur normal** $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Démonstration :

On détermine les coordonnées d'un point A telles que $ax_0+by_0+cz_0+d=0$.

Par exemple, si $a\neq 0$ alors on pose $y_0=z_0=0$ et $x_0=-\frac{d}{4}$.

$\begin{cases}ax+by+cz+d=0\\ax_0+by_0+cz_0+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0\Leftrightarrow\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$ avec $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\Leftrightarrow$M appartient au plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

2.6. Projeté orthogonal d'un point de l'espace sur une droite

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace.

$A(1;-2;2)$. d est la droite passant par $B(5;4;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Le projeté orthogonal du point A sur la droite d est le point d'intersection H de la droite d et du plan P passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$.

La représentation paramétrique de d est $\begin{cases}x=5+5t\\y=4+t\\z=3-t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

Recherche de l'équation cartésienne de P :

$M(x;y;z)$ $A(1;-2;2)$ $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix}$

$M\in P\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow 5(x-1)+(y+2)-(z-2)=0\Leftrightarrow 5x+y-z-1=0$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

On détermine l'intersection de la droite d et du plan P

$$\begin{cases} x=5+5t \\ y=4+t \\ z=3-t \\ 5x+y-z-1=0 \end{cases}$$

$5(5+5t)+(4+t)-(3-t)-1=0$

$25+25t+4+t-3+t-1=0$

$27t+25=0$

$t=-\frac{25}{27}$

$x_H=5-5\times\frac{25}{27}=\frac{10}{27}$

$y_H=4-\frac{25}{27}=\frac{83}{27}$

$z_H=3+\frac{25}{27}=\frac{106}{27}$

Donc $H\left(\frac{10}{27};\frac{83}{27};\frac{106}{27}\right)$

2.7. Plans perpendiculaires

P est un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

P' est un plan de vecteur normal $\vec{n'}$

Les plans P et P' sont **perpendiculaires** si et seulement si les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont **orthogonaux**.

3. Perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires

On veut démontrer le résultat suivant :

Si d_1 et d_2 sont **deux droites non coplanaires** alors il existe une **unique** droite D **perpendiculaire** à d_1 et d_2 .

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Démonstration :

Rappel : Deux droites perpendiculaires sont deux droites orthogonales et sécantes.

Pour résoudre ce problème, on propose de procéder par analyse et synthèse.

Analyse

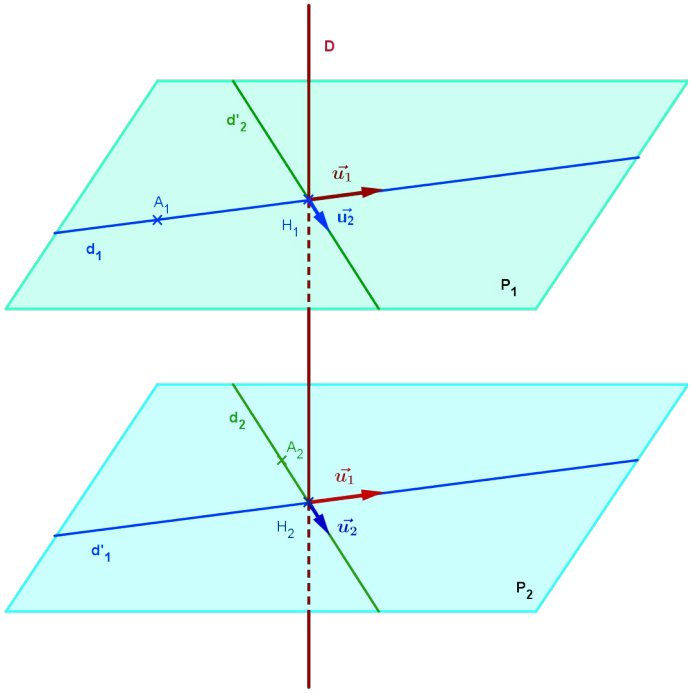
On suppose le problème résolu, c'est à dire il existe D sécante en H_1 à d_1 et en H_2 à D_2 et orthogonale à d_1 et d_2.

d_1 est la droite passant par A_1 et de vecteur directeur $\vec{u_1}$.

d_2 est la droite passant par A_2 et de vecteur directeur $\vec{u_2}$.

d'_1 est la droite passant par H_2 et parallèle à d_1.

d'_2 est la droite passant par H_1 et parallèle à d_2.



$D=(H_1H_2)$

$\overrightarrow{H_1H_2}$ est un vecteur normal au plan P_1 passant par A_1 et de vecteurs directeurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$.

$\overrightarrow{H_1H_2}$ est un vecteur normal au plan P_2 passant par A_2 et de vecteurs directeurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$.

Π_1 est le plan contenant d_1 et d'_1 c'est à dire le plan contenant d_1 et perpendiculaire aux plans P_1 et P_2 ou c'est à dire le plan passant par A_1 et de vecteurs directeurs $\vec{u_1}$ et $\vec{n}$ (vecteur normal à P_1 et P_2).

Π_2 est le plan contenant d_2 et d'_2 c'est à dire le plan contenant d_2 et perpendiculaire aux plans P_1 et P_2 ou c'est à dire le plan passant par A_2 et de vecteurs directeurs $\vec{u_2}$ et $\vec{n}$ (vecteur normal à P_1 et P_2).

Synthèse

d_1 et d_2 sont données non coplanaires donc $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires.

Π_1 est le plan passant par A_1 et de vecteurs directeurs $\vec{u_1}$ et $\vec{n}$.

Π_1 contient la droite D_1 passant par A_1 et de vecteur directeur $\vec{n}$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Π_2 est le plan passant par A_2 et de vecteurs directeurs $\vec{u_2}$ et $\vec{n}$.

Π_2 contient la droite D_2 passant par A_2 et de vecteur directeur $\vec{n}$.

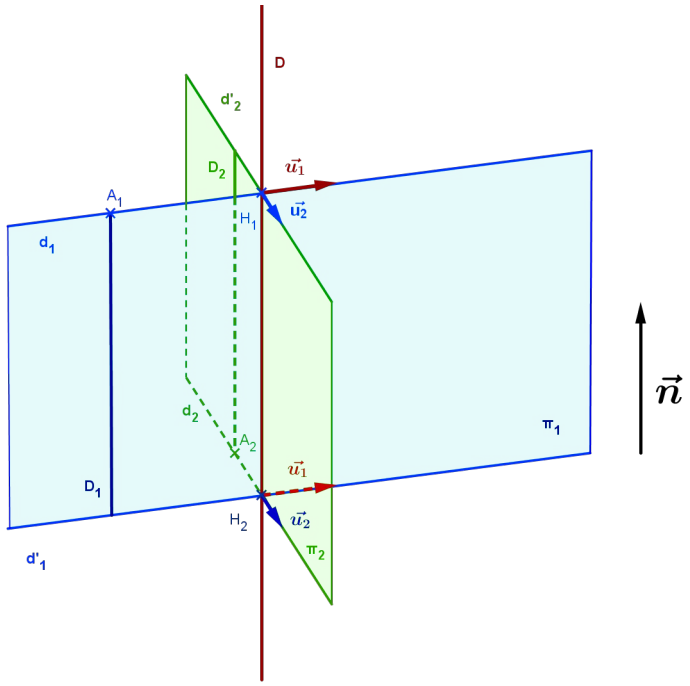
Π_1 et Π_2 sont deux plans sécants car les vecteurs $\vec{n}$; $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas coplanaires.

Soit D la droite d'intersection des plans Π_1 et Π_2 .

D_1 est contenue dans Π_1 et D_2 est contenue dans Π_2 et D_1 et D_2 sont parallèles ; le théorème du toit nous permet de conclure que la droite D d'intersection de Π_1 et Π_2 est parallèle à D_1 et D_2 donc de vecteur directeur $\vec{n}$.

Les vecteurs $\vec{n}\,;\vec{u_1}\,;\vec{u_2}$ ne sont pas coplanaires donc d_2 est sécante à Π_1 en H_2 et d_2 est contenue dans Π_2 donc $H_2 \in D$.

Les vecteurs $\vec{n}\,;\vec{u_1}\,;\vec{u_2}$ ne sont pas coplanaires donc d_1 est sécante à Π_2 en H_1 et d_1 est contenue dans Π_1 donc $H_1 \in D$.



Conclusion :

D est orthogonale à d_1 et d_2 (car $\vec{n}$ est un vecteur directeur de D), D est sécante à d_1 en H_1 et à d_2 en H_2 .

D est donc la perpendiculaire commune à d_1 et d_2 .

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés