Exercice

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace.

Calculer les coordonnées d'un vecteur non nul orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans les cas suivants :

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$.

2. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\4\end{pmatrix}$.

3. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$.

Correction :

1. On vérifie que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

$$\vec{u}=\lambda\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases}-3=2\lambda\\ 1=-\lambda\\ 2=2\lambda\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=-\frac{3}{2}\\ \lambda=\ -1\\ \lambda=\ \ 1\end{cases}$$

Donc, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **ne sont pas colinéaires**.

$$\vec{n}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} \text{ est orthogonal à } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases}-3a+b+2c=0\\ 2a-b+2c=0\end{cases}$$

On choisit pour inconnues a et b .

$$\begin{cases}-3a+b=-2c\\ 2a-b=-2c\end{cases}$$

On obtient $-a=-4c$ soit $a=4c$ et $-b=-10c$ soit $b=10c$

Donc $\vec{n}\begin{pmatrix}4c\\ 10c\\ c\end{pmatrix}$.

Pour $c=0$, on obtient le vecteur nul.

Pour $c=1$, $\boxed{\vec{n_1}\begin{pmatrix}4\\ 10\\ 1\end{pmatrix}}$ est **un vecteur non nul orthogonal** à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2. On vérifie que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

$$\vec{u}=\lambda\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases}1=-\frac{1}{2}\lambda\\ -2=\lambda\\ 3=4\lambda\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=-2\\ \lambda=-2\\ \lambda=\frac{3}{4}\end{cases}$$

Donc, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **ne sont pas colinéaires**.

$\vec{n}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ $\Leftrightarrow \begin{cases}a-2b+3c=0\\ -\frac{1}{2}a+b+4c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a-2b+3c=0\\ -a+2b+8c=0\end{cases}$ (on a multiplié la 2ième équation par 2)

On ne peut pas choisir pour inconnues a et b car on a obtenu la même valeur de λ pour a et b . On choisit a et c .

$$\begin{cases}a+3c=2b\\ -a+8c=-2b\end{cases}$$

On obtient $11c=0$ soit $c=0$ et $a=2b$

Donc $\vec{n}\begin{pmatrix}2b\\b\\0\end{pmatrix}$.

Pour $b=0$, on obtient le vecteur nul.

Pour $b=1$, $\boxed{\vec{n_1}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}}$ est un vecteur non nul orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

3. On vérifie que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

$$\vec{u}=\lambda\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases}1=2\lambda\\0=4\lambda\\0=5\lambda\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=\dfrac{1}{2}\\\lambda=0\\\lambda=0\end{cases}$$

Donc, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

$\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ $\Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\2a+4b+5c=0\end{cases}$

On ne peut pas choisir pour inconnues b et c car on a obtenu la même valeur de λ pour b et c . On choisit a et b .

$$\begin{cases}a=0\\2a+4b=-5c\end{cases}$$

On obtient $a=0$ et $b=-\dfrac{5}{4}c$

Donc $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-\dfrac{5}{4}c\\c\end{pmatrix}$.

Pour $c=0$, on obtient le vecteur nul.

Pour $b=4$, $\boxed{\vec{n_4}\begin{pmatrix}0\\-5\\4\end{pmatrix}}$ est un vecteur non nul orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.