

Exercice

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace.

$A(1; 3; -1)$ $B(-2; 3; 1)$ $C(5; 1; -3)$

1. Donner une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point $K(1; 1; 1)$ sur le plan (ABC).

Correction :

$$1. \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

$$\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = 4\lambda \\ 0 = -2\lambda \\ 2 = -2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{3}{4} \\ \lambda = 0 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ **ne sont pas colinéaires** et **les points A ; B et C ne sont pas alignés**.

$$\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \text{ est normal au plan (ABC)} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a + 2c = 0 \\ 4a - 2b - 2c = 0 \end{cases}$$

On choisit comme inconnues a et b .

$$\begin{cases} -3a = -2c \\ 4a - 2b = 2c \end{cases}$$

On obtient $-6b = -2c$ soit $b = \frac{1}{3}c$ et $a = \frac{2}{3}c$.

$$\vec{n} \begin{pmatrix} \frac{2}{3}c \\ \frac{1}{3}c \\ c \end{pmatrix}.$$

Pour $c=0$, on obtient le vecteur nul.

Pour $c=3$, $\vec{n}_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est **un vecteur normal au plan (ABC)**.

$M(x; y; z)$ Appartient au plan (ABC)

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1) + 1(y-3) + 3(z+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{2x + y + 3z - 2 = 0} \text{ est } \textbf{une équation cartésienne du plan (ABC)}.$$

2. La droite D orthogonale au plan (ABC) passant par K a pour vecteur directeur $\vec{n}_3$.

$$D : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Le projeté orthogonal du point K sur le plan (ABC) est le point H d'intersection du plan (ABC) et de la droite D .

$$\begin{cases} 2x + y + 3z - 2 = 0 \\ x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

On obtient :

$$2(1 + 2t) + (1 + t) + 3(1 + 3t) - 2 = 0$$

$$14t + 4 = 0$$

$$t = -\frac{4}{14} = -\frac{2}{7}$$

$$x = 1 - 2 \times \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$$

$$y = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

$$z = 1 - 3 \times \frac{2}{7} = \frac{1}{7}$$

Donc, $\boxed{H\left(\frac{3}{7}; \frac{5}{7}; \frac{1}{7}\right)}$