Exercice

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace.

Déterminer l'intersection des plans P et P' donner par les équations cartésiennes suivantes.

1. $P: x+y-5=0$

$P': y-z+3=0$

2. $P: -2x+3y-4z-5=0$

$P': -\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y-\frac{2}{3}z-1=0$

3. $P: x+\sqrt{2}y+2\sqrt{2}z-\sqrt{2}=0$

$P': -\sqrt{2}x-2y-4z+2=0$

Correction :

1. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ est **un vecteur normal de P** et $\vec{n'}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ est **un vecteur normal de P'**.

$$\vec{n}=\lambda\vec{n'} \Leftrightarrow \begin{cases}1=0.\lambda\\1=\lambda\\0=-\lambda\end{cases}$$

La première équation n'admet pas de solution donc $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ **ne sont pas colinéaires**. Les plans P et P' **ne sont pas parallèles donc sécants**.

$$\begin{cases}x+y-5=0\\y-z+3=0\end{cases}$$

Parmi les trois inconnues, on choisit deux inconnues et la troisième joue le rôle de paramètre.

On choisit pour inconnues x et z

$$\begin{cases}x=-y+5\\z=y+3\end{cases}$$

y est le paramètre. On pose $y=t$ avec $t\in\mathbb{R}$, et on obtient :

$$\boxed{\begin{cases}x=-t+5\\y=t\\z=t+3\end{cases}} \quad t\in\mathbb{R}$$

C'est **une représentation paramétrique de la droite** d passant par $\boxed{A(5;0;3)}$ et **de vecteur directeur** $\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}}$.

2. $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\-4\end{pmatrix}$ est **un vecteur normal de P** et $\vec{n'}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ est **un vecteur normal de P'**.

$$\vec{n}=\lambda\vec{n'} \Leftrightarrow \begin{cases}-2=-\frac{1}{3}\lambda\\3=\frac{1}{2}\lambda\\-4=-\frac{2}{3}\lambda\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=6\\\lambda=6\\\lambda=6\end{cases}$$

donc $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont **colinéaires** et **les plans P et P' sont parallèles**.

Si on multiplie tous les coefficients de l'équation de P' par 6, on obtient :

$\boxed{-2x+3y-4z-6=0}$.

Or, P : $\boxed{2x+3y-4z-5=0}$

$-6 \neq -5$, **les deux plans strictement parallèles**.

3. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ 2\sqrt{2}\end{pmatrix}$ est **un vecteur normal de P** et $\vec{n}'\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\ -2\\ -4\end{pmatrix}$ est **un vecteur normal de P'**.

$$\vec{n}=\lambda\vec{n}' \Leftrightarrow \begin{cases}1=-\sqrt{2}\lambda\\ \sqrt{2}=-2\lambda\\ 2\sqrt{2}=-4\lambda\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \lambda=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \lambda=-\dfrac{2\sqrt{2}}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

donc $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont **colinéaires** et **les plans P et P' sont parallèles**.

Si on multiplie tous les coefficients de l'équation de P par $-\sqrt{2}$, on obtient :

$\boxed{P : -\sqrt{2}x-2y-4z+2=0}$

Or, $\boxed{P' : -\sqrt{2}x-2y-4z+2=0}$

Les **deux plans P et P' sont confondus**.