Exercice

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace.

d_1 est la droite passant par $A_1(1;1;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

d_2 est la droite passant par $A_2(2;-2;-2)$ et de vecteur directeur $\vec{u_2}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$.

1. Démontrer que les droites d_1 et d_2 ne sont pas coplanaires.
2. Donner une représentation paramétrique de la perpendiculaire commune à d_1 et d_2.

Correction :

1. $\vec{u_1}=\lambda\vec{u_2} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=3\lambda \\ -1=-2\lambda \\ 1=\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\dfrac{1}{3} \\ \lambda=\dfrac{1}{2} \\ \lambda=1 \end{cases}$.

$\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ **ne sont pas colinéaires**.

Donc les droites d_1 et d_2 **ne sont pas parallèles**.

On détermine un vecteur non nul orthogonal à $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$.

$\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \vec{n}\cdot\vec{u_1}=0 \\ \vec{n}\cdot\vec{u_2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b+c=0 \\ 3a-2b+c=0 \end{cases}$

On choisit comme inconnues par exemple b et c :

$\begin{cases} -b+c=-a \\ -2b+c=-3a \end{cases}$

On obtient $b=2a$ et $c=2a-a=a$

$\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ 2a \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur orthogonal à $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$.

Pour $a=0$, on obtient le vecteur nul.

Pour $a=1$, $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est **un vecteur non nul orthogonal** à $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$.

Soit P_1 le plan passant par A_1 et de vecteurs directeurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$, donc P_1 le plan passant par A_1 et de vecteur normal $\vec{n}$.

$M(x;y;z)$ appartient à $P_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1M}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow 1\times(x-1)+2\times(y-1)+1\times(z-1)=0 \Leftrightarrow \boxed{x+2y+z-4=0}$

d_2 est parallèle à P_1 ($\vec{u_2}$ est un des deux vecteurs directeurs choisis)

$A_2(2;-2;-2)$

$2+2\times(-2)+(-2)-4=-8\neq 0$

Donc A_2 **n'appartient pas à** P_1 donc d_2 est **strictement parallèle** à P_1 .

Conséquence : les droites d_1 et d_2 **ne sont pas coplanaires**.

2. Soit Π_1 le **plan passant par** $A_1(1;1;1)$ et de **vecteurs directeurs** $\vec{u_1}$ et $\vec{n}$.

On détermine un vecteur $\overrightarrow{N_1}$ normal à Π_1 .

$$\overrightarrow{N_1}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{N_1}\cdot\vec{u_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{N_1}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b+c=0\\ 3a-2b+c=0\end{cases}$$

On choisit comme inconnues a et b :

$$\begin{cases}a-b=-c\\ a+2b=-c\end{cases}$$

On obtient $3b=0$ soit $b=0$ et $a=-c$

$$\overrightarrow{N_1}\begin{pmatrix}-c\\0\\c\end{pmatrix}.$$

Pour $c=1$ $\boxed{\overrightarrow{N_1}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}$.

$M(x;y;z)$ appartient à Π_1 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{A_1M}\cdot\overrightarrow{N_1}=0$ $\Leftrightarrow$ $-1\times(x-1)+0\times(y-1)+1\times(z-1)=0$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{-x+z=0}$

Soit Π_2 le **plan passant par** $A_1(1;1;1)$ et **de vecteurs directeurs** $\vec{u_2}$ et $\vec{n}$.

On détermine un vecteur $\overrightarrow{N_2}$ normal à Π_2 .

$$\overrightarrow{N_2}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{N_2}\cdot\vec{u_2}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{N_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a-2b+c=0\\ a+2b+c=0\end{cases}$$

On choisit comme inconnues a et b :

$$\begin{cases}a-b=-c\\ a+2b=-c\end{cases}$$

On obtient $4a=-2c$ soit $a=-\frac{1}{2}c$ et $2b=\frac{1}{2}c-c=-\frac{1}{2}c$ soit $b=-\frac{1}{4}c$.

$$\overrightarrow{N_2}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}c\\-\frac{1}{4}c\\c\end{pmatrix}.$$

Pour $c=-4$ $\boxed{\vec{N_2}\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}}$.

$M(x;y;z)$ appartient à Π_2

$\Leftrightarrow \ \overrightarrow{A_2M}\cdot\vec{N_2}=0 \ \Leftrightarrow \ 2\times(x-2)+1\times(y+2)-4\times(z+2)=0 \ \Leftrightarrow \ \boxed{2x+y-4z-10=0}$

La **perpendiculaire commune** à d_1 et d_2 est la **droite** D **d'intersection des plans** Π_1 et Π_2 .

$\begin{cases}-x+z=0\\ 2x+y-4z-10=0\end{cases}$

On choisit x et y pour inconnues et z pour paramètre donc $z=t\in\mathbb{R}$

$\begin{cases}x=\ t\\ 2x+y=4t+10\end{cases}$

On obtient $x=t$ et $y=2t+10$

Une **représentation paramétrique** de D est :

$D:\boxed{\begin{cases}x=\ t\\ y=2t+10\\ z=\ t\end{cases}}$

On vérifie que $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ est **un vecteur directeur** de D .

Remarques :

Pour obtenir **les coordonnées du point** H_1 , on détermine **l'intersection** de d_1 et D .

$\begin{cases}x=\ t_1+1=t\\ y=-t_1+1=2t+10\\ z=\ t_1+1=t\end{cases}$

On obtient 2 fois la même équation $t-t_1=1$ et le système devient : $\begin{cases}t-t_1=\ 1\\ 2t+t_1=-9\end{cases}$.

$3t=-8$ soit $t=-\frac{8}{3}$ et donc $t_1=-\frac{11}{3}$.

Et, $\boxed{H_1\left(-\frac{8}{3};\frac{14}{3};-\frac{8}{3}\right)}$.

Pour obtenir **les coordonnées du point** H_2 , on détermine **l'intersection** de d_2 et D .

$$\begin{cases} x=3t_2+2=t \\ y=-2t_2-2=2t+10 \\ z=t_2-2=t \end{cases} \qquad \begin{cases} t-3t_2=\ 2(1) \\ 2t+2t_2=-12(2) \\ t-t_2=-2(3) \end{cases}$$

D'après les équations (2) et (3) :

$$\begin{cases} t+t_2=-6(2) \\ t-t_2=-2(3) \end{cases}$$

On obtient $2t=-8$ soit $t=-4$ et $t_2=4-6=-2$

On vérifie dans l' équation (1) :

$-4-3\times(-2)=-4+6=2$

Et, $x=-4$; $y=2$; $z=-4$

$\boxed{H_2(-4;2;-4)}$.