

Exercice (d'après bac)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère les trois points A, B et C de coordonnées respectives :

$$A(-1; 2; 1) \quad B(1; -6; -1) \quad \text{et} \quad C(2; 2; 2)$$

1. a. Vérifier que les points A, B et C définissent bien un plan.

b. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soit P le plan d'équation : $x - y + z - 4 = 0$.

a. Montrer que les plans (ABC) et P sont sécants.

b. Soit D la droite intersection des plans P et (ABC). Déterminer une représentation paramétrique de la droite D.

Correction :

1. a. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\vec{AB} = \lambda \vec{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3\lambda \\ -8 = 0\lambda \\ -2 = \lambda \end{cases}$$

La deuxième équation n'admet pas de solution donc les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} **ne sont pas colinéaires** et les points **A ; B et C ne sont pas alignés** et **ces points définissent un plan**.

b. $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est **un vecteur normal** au plan (ABC) si et seulement si \vec{n} est **orthogonal** à \vec{AB} et \vec{AC} .

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 1 \times 2 + 1 \times (-8) - 3 \times (-2) = 2 - 8 + 6 = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AC} = 1 \times 3 + 1 \times (0) - 3 \times (1) = 3 - 3 = 0$$

Donc, \vec{n} est **un vecteur normal au plan (ABC)**.

c. $M(x; y; z)$ appartient au plan (ABC)

$$\Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \times (x+1) + 1 \times (y-2) - 3(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x+y-3z+2=0} \text{ est } \textbf{une équation cartésienne du plan (ABC)}.$$

2. a. $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

$$\vec{n}' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal au plan P.}$$

Les plans (ABC) et P sont **sécants** si et seulement si \vec{n} et \vec{n}' **ne sont pas colinéaires**.

$$\vec{n} = \lambda \vec{n}' \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda \\ 1 = -\lambda \\ -3 = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \\ \lambda = -3 \end{cases}$$

Donc, \vec{n} et \vec{n}' **ne sont pas colinéaires** et donc les **plans (ABC) et P sont sécants**.

b.
$$\begin{cases} x+y-3z+2=0 \\ x-y+z-4=0 \end{cases}$$

On choisit pour inconnues x et y et pour paramètre z , donc $z = t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x+y=3t-2 \\ x-y=-t+4 \end{cases}$$

On obtient $2x=2t+2$ soit $x=t+1$ et $y=-t-1+3t-2=2t-3$

Une représentation par paramétrique de D est :

$$\begin{cases} x=t+1 \\ y=2t-3 \\ z=t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

D est **la droite passant par le point** $E(1;-3;0)$ **et de vecteur directeur** $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.