

Exercice (d'après bac)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

Partie A - Restitution organisée de connaissances

On désigne par a, b, c, d quatre réels tels que le vecteur $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ soit différent du vecteur nul.

On appelle P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.

Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan P, c'est-à-dire que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur $\vec{AB}$ où A et B sont deux points quelconques du plan P.

Partie B - Questionnaire à choix multiples

Pour chaque question, trois réponses sont proposées, une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse choisie ainsi que la justification de ce choix.

Il est attribué 1 point si la réponse est exacte et justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

On désigne par P le plan d'équation cartésienne $2x - y + 3z = 0$ et par A et B les deux points du plan P de coordonnées respectives $(1; 2; 0)$ et $(0; 3; 1)$.

1. Soient C, D, E les points de coordonnées respectives $(1; 1; -1)$, $(-1; 4; 2)$, $(1; 5; 1)$.

- a. Les points A, B, C définissent le plan P.
- b. Les points A, B, D définissent le plan P.
- c. Les points A, B, E définissent le plan P.

2. La droite D est définie par la représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- a. La droite D est perpendiculaire au plan P.
- b. La droite D est strictement parallèle au plan P.
- c. La droite D est incluse dans le plan P.

Correction :**Partie A**

On détermine les coordonnées d'un point $M_0(x_0; y_0; z_0)$ du plan P.

Si $a \neq 0$ alors on pose $y_0 = z_0 = 0$ et $x_0 = -\frac{d}{a}$.

Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors on pose $x_0 = z_0 = 0$ et $y_0 = -\frac{d}{b}$.

Si $a = 0$ et $b = 0$ alors $c \neq 0$ (car $\vec{n}$ n'est pas le vecteur nul), on pose $x_0 = y_0 = 0$ et $z_0 = -\frac{d}{c}$.

Donc $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ et M_0 est un point de P.

$M(x; y; z)$ appartient au plan P

$$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 = ax_0 + by_0 + cz_0 + d$$

$$\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{n} \text{ orthogonal à } \overrightarrow{M_0M}.$$

Or, pour tous points A et B du plan il existe un point M tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M_0M}$

Donc, $\vec{n}$ **orthogonal à** $\overrightarrow{AB}$.

Partie B

1. a. $C(1; 1; -1)$

$$2 \times 1 - 1 + 3 \times (-1) = 2 - 1 - 3 = -2 \neq 0$$

C **n'appartient pas au plan** P. Donc **les points A ; B et C ne définissent pas le plan** P.

b. $D(-1; 4; 2)$

$$2 \times (-1) - 4 + 3 \times (2) = -2 - 4 + 6 = 0$$

D **appartient au plan** P.

Il faut donc savoir si les points A; B et D sont alignés ou non.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = 2 \overrightarrow{AB}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont **colinéaires**, **les points A ; B et D sont alignés** donc **les points A ; B et D ne définissent pas le plan** P.

c. $D(1;5;1)$

$$2 \times (1) - 5 + 3 \times (1) = 2 - 5 + 3 = 0$$

E **appartient au plan** P .

Il faut donc savoir si les points A; B et E sont alignés ou non.

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AE} = \lambda \vec{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -\lambda \\ 3 = \lambda \\ 1 = \lambda \end{cases}$$

Donc, les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AE}$ **ne sont pas colinéaires**, donc **les points A ; B et E définissent le plan P**.

2. D est la droite passant par $F(1;0;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a. Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est **un vecteur normal au plan P**.

$$\vec{n} = \lambda \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -\lambda \\ -1 = \lambda \\ 3 = \lambda \end{cases}$$

$\vec{n}$ et $\vec{u}$ **ne sont pas colinéaires** donc la droite D **n'est pas perpendiculaire au plan P**.

b. $\vec{n} \cdot \vec{u} = 2 \times (-1) - 1 \times 1 + 3 \times 1 = -2 - 1 + 3 = 0$

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{u}$ **sont orthogonaux** donc la droite D **est parallèle au plan P**.

$$F(1;0;2) \quad P: 2x - y + 3z = 0$$

$$2 \times 1 - 0 + 3 \times 2 = 8 \neq 0$$

Donc **F n'appartient pas au plan P** donc **la droite D est strictement parallèle au plan P**.

c. D est **strictement parallèle au plan P** donc D **n'est pas incluse dans** P .