Exercice (d'après bac)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. On considère les points : A(0 ; 0 ; 2), B(0 ; 4 ; 0) et C(2 ; 0 ; 0).

1. Vérifier qu'une équation du plan (ABC) est : $2x+y+2z=4$.

2. a. Déterminer une équation du plan P passant par A et orthogonal à la droite (BC).

b. Soit Δ la droite intersection du plan P et du plan (ABC). Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ . Quel rôle joue cette droite dans le triangle ABC ?

3. a. Soit Δ' la médiane issue de B du triangle ABC.

Montrer qu'une représentation paramétrique de Δ' dans le triangle ABC est : $\begin{cases} x=t \\ y=4-4t \\ z=t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

b. Montrer que le triangle ABC est un triangle isocèle.

4. Soit H le point d'intersection des droites Δ et Δ' . Montrer que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{8}{9}\right)$.

Que représente le point H pour le triangle ABC ?

5. Montrer que le point H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC). Calculer alors la distance du point O au plan (ABC).

Correction :

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Pour démontrer que $2x+y+2z=4$ est une équation du plan (ABC), il suffit de vérifier que les trois points A ; B et C sont des solutions de l'équation proposée.

$A(0;0;2)$ $2\times 0+0+2\times 2=4$

$B(0;4;0)$ $2\times 0+4+2\times 0=4$

$C(2;0;0)$ $2\times 2+0+2\times 0=4$

Conclusion : $\boxed{2x+y+2z=4}$ est une équation du plan (ABC).

2. a. P est le plan passant par $\boxed{A(0;0;2)}$ et de vecteur normal $\boxed{\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\-4\\0\end{pmatrix}}$.

$M(x;y;z)$ appartient au plan P

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$\Leftrightarrow$ $2\times(x-0)-4\times(y-0)+0\times(z-2)=0$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{2x-4y=0}$

b. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\-4\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P.

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

$$\overrightarrow{BC}=\lambda\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases}2=2\lambda\\-4=\lambda\\0=2\lambda\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=1\\\lambda=-4\\\lambda=0\end{cases}$$

les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires donc les plans (ABC) et P sont sécants.

Δ est leur droite d'intersection.

$$\begin{cases}2x+y+2z=4\\2x-4y=0\end{cases}$$

On choisit x et z pour inconnues et y pour paramètre donc $y=t_1$ avec $t_1\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases}2x+2z=4-t_1\\2x=4t_1\end{cases}$$

Donc, $x=2t_1$ et $2z=-4t_1+4-t_1=4-5t_1$ soit $z=2-\dfrac{5}{2}t_1$.

On obtient pour **représentation paramétrique** de Δ est :

$$\begin{cases} x = 2t_1 \\ y = t_1 \\ z = 2 - \frac{5}{2}t_1 \end{cases} \quad t_1 \in \mathbb{R}$$

Δ est **la droite passant par** $A(0;0;2)$ et **de vecteur directeur** $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

(BC) est orthogonale au plan P donc orthogonale à toute droite contenue dans le plan P.

Δ est contenue dans P donc Δ est orthogonale à (BC).

Δ est contenue dans (ABC) et Δ est orthogonale à (BC) et Δ passe par le point A donc Δ est **la hauteur du triangle ABC issue de A**.

3. a. Δ' est **la médiane du triangle ABC issue de B**.

Soit I le milieu de [AC]. $I(1;0;1)$.

$\Delta' = (BI)$ est **la droite passant par** $B(0;4;0)$ et **de vecteur directeur** $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On obtient pour **représentation paramétrique** de Δ' :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 4 - 4t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

b. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad AB^2 = 16 + 4 = 20$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad AC^2 = 4 + 4 = 8$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad BC^2 = 4 + 16 = 20$

$AB = BC \neq AC$ donc **le triangle ABC est isocèle de sommet principal B**.

4. $\begin{cases} x=2t_1=t(1) \\ y=t_1=4-4t(2) \\ z=2-\frac{5}{2}t_1=t(3) \end{cases}$

On considère les équation (1) et (3) :

$$\begin{cases} x=2t_1=t(1) \\ z=2-\frac{5}{2}t_1=t(3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t-2t_1=0 \\ t+\frac{5}{2}t_1=2 \end{cases}$$

On obtient $\frac{9}{2}t_1=2$ soit $t_1=\frac{4}{9}$ et $t=2t_1=\frac{8}{9}$.

On vérifie pour l'équation (2) :

$t_1=\frac{4}{9}$ et $4-4t=4-4\times\frac{8}{9}=4-\frac{32}{9}=\frac{4}{9}$

Donc $x=2t_1=\frac{8}{9}$; $y=t_1=\frac{4}{9}$; $z=t=\frac{8}{9}$.

Donc, $\boxed{H\left(\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{8}{9}\right)}$.

Le triangle ABC est **isocèle de sommet principal B** or Δ' est **la médiane du triangle ABC issue de B** donc Δ' est aussi **la hauteur du triangle ABC issue de B**.

Δ est **la hauteur du triangle ABC issue de A**.

Donc **H est l'orthocentre du triangle ABC**.

5. $\overrightarrow{OH}\begin{pmatrix}\frac{8}{9}\\ \frac{4}{9}\\ \frac{8}{9}\end{pmatrix}$ $\qquad \vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{OH}=\frac{4}{9}\vec{n}$

(OH) est orthogonal au plan (ABC) et H appartient au plan (ABC).

Donc, H est **le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC)**.

OH est la distance du point O au plan ABC :

$OH^2=\frac{64}{81}+\frac{16}{81}+\frac{64}{81}=\frac{144}{81}$

Donc $\boxed{OH=\frac{12}{9}}$.