Dénombrement et probabilités

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

1. Liste d'éléments d'un ensemble fini

1.1. factorielle d'un entier naturel

Définition :

Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, on nomme **factorielle** n et on note $n!$, l'entier naturel égal au produit de tous les entiers naturels de 1 à n, c'est à dire :
$n!=1\times 2\times 3\times \ldots \times n$.
Par convention, $0!=1$ et $1!=1$.

Exemples :

$8!=1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8=40320$

$\frac{7!}{4!}=\frac{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7}{1\times 2\times 3\times 4}=5\times 6\times 7=210$

1.2. Définition

Soit E un ensemble non vide fini, p est un entier naturel non nul.
On nomme **p-liste d'éléments de E**, toute liste $(x_1;x_2;\ldots;x_p)$ où x_1 ; x_2 ;... ; x_p sont tous éléments de E. (On note l'ensemble des p-listes de E : E^p).

1.3. Proposition

n et p sont deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2. E est un ensemble de cardinal n. L'ensemble des p-listes de E a pour cardinal : n^p.

1.4. Exemples

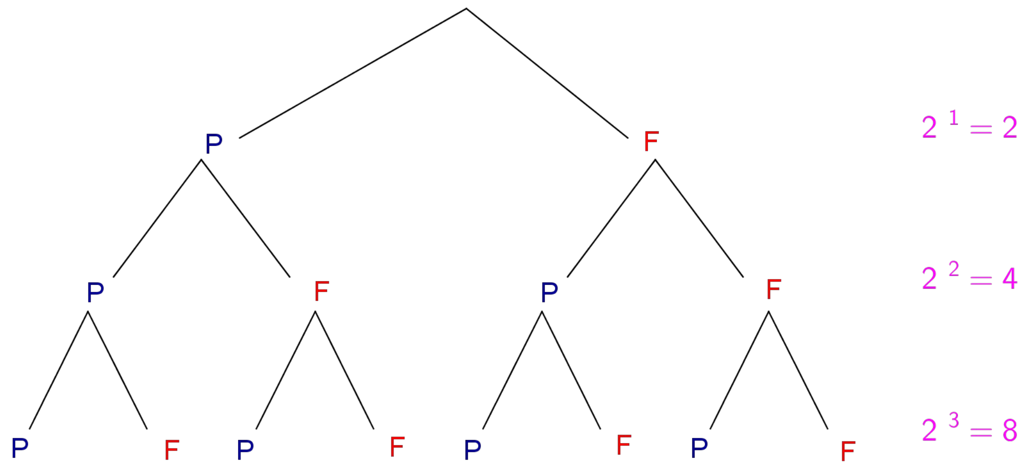
a) On jette plusieurs fois une pièce de monnaie.

E={P;F} (pile;face)

n=card{E}=2

- p=3 card $E^3=2^3=8$
  On représente E^3 à l'aide d'un arbre.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés



- $p=10$ card $E^{10}=2^{10}=1024$

b) On jette plusieurs fois un dé cubique numéroté de 1 à 6.

$E=\{1;2;3;4;5;6\}$

$n=\text{card}\{E\}=2$

- $p=2$ card $E^2 = 6^2=36$
  (On représente en général E^2 à l'aide d'un tableau à double entrée, mais on peut aussi le représenter à l'aide d'un arbre.)

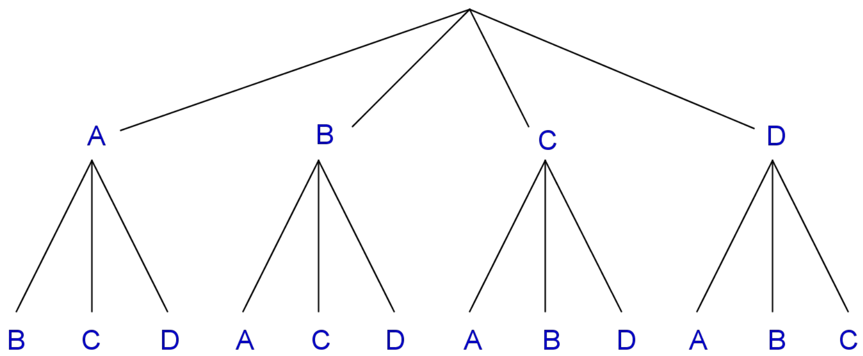
- $p=4$ card $E^4 = 6^4=1296$

1.5. p-listes d'éléments de E deux à deux distincts

a) <u>Exemple</u>

$E=\{A;B;C;D\}$

On considère les 2-listes d'éléments deux à deux distincts de E.



Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Il y a 12 2-listes d'éléments deux à deux distincts de E.

Remarque : $12=4\times3$

b) Proposition

E est un ensemble fini de n éléments $(n\geqslant1)$. Pour tout entier naturel p tel que $1\leqslant p\leqslant n$, le nombre des p-listes d'éléments de E deux à deux distincts est :

$n(n-1)\dots(n-p+1)=\dfrac{n!}{(n-p)!}$ (p facteurs)

Démonstration :

Pour le premier élément de la liste, il y a n possibilités.

Pour le deuxième élément de la liste, il y a (n-1) possibilités. (nombres d'éléments de E distincts du premier élément).

Donc, pour les deux premiers éléments, il y a $n(n-1)$ possibilités.

Etc...

Pour le p$^{\text{ième}}$ élément de la liste, il y a $n-(p-1)=n-p+1$ possibilités.

Donc, le nombre de p-listes d'éléments deux à deux distincts de E est : $n(n-1)\dots(n-p+1)$.

Or, $\dfrac{n!}{(n-p)!}=\dfrac{1\times2\times\dots\times(n-p)(n-p+1)\dots(n-1)n}{1\times2\times\dots\times(n-p)}=(n-p+1)\dots(n-1)n$

1.6. Permutations

a) Définition

n est un entier naturel non nul.

On nomme **permutation** d'un ensemble E de n éléments toute n-liste d'éléments de E deux à deux distincts.

b) Proposition

n est un entier naturel non nul.

Le **nombre** de permutations d'un ensemble fini E de n éléments est $n!$.

Démonstration :

Le nombre de n-listes d'éléments deux à deux distincts de E est :

$n(n-1)\times\dots\times(n-n+1)=n(n-1)\times\dots\times1=n!$

c) Exemple

E={1;2;3} $n=3$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Le nombre de permutations de E est $3!=3\times3\times1=6$

Les 6 permutations de E sont :

1;2 ;3

1;3 ;2

2;1;3

2;3;1

3;1;2

3;2;1

d) Anagramme

On nomme **anagramme** d'un mot toute permutation des lettres de ce lot, ayant un sens ou non en français.

Exemple

On considère le mot : MARIE (ici 5 lettres distinctes deux à deux distinctes)

E={M;A;R;I;E}

Il y a $5!$ anagrammes du mot MARIE

$5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

MAIRE ou AIMER sont deux anagrammes du mot ayant un sens en français. MREIA est une anagramme du mot n'ayant pas de sens en français.

2. Combinaisons

2.1. Définition

E est un ensemble fini de cardinal n. p est un entier naturel tel que $0\leqslant p\leqslant n$.

On nomme **combinaison de p éléments de E** toute partie de E ayant p éléments.

2.2. Exemple

E={A;B;C;D} card E=n=4

{A;B;C} est une combinaison de 3 éléments de E (donc p=3)

Remarques :

- Une combinaison n'est pas ordonnée.
- Il existe $3!=6$ 3-listes d'éléments distincts deux à deux de E contenant les éléments de la combinaison {A;B;C} (c'est le nombre de permutations de {A;B;C}.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

2.3. Notation

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble de n est noté $\binom{n}{p}$.

On lit ***p* parmi *n***.

2.4. Proposition

n et p sont deux entiers naturels tels que $0\leqslant p\leqslant n$, on a :

$\binom{n}{p}=\dfrac{n(n-1)\times\ldots\times(n-p+1)}{p!}=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démonstration

Combinaisons de p éléments de E.	1	$\binom{n}{p}$
p-listes de p éléments de E deux à deux distincts.	$p!$	$\dfrac{n!}{n-p!}$

On a un tableau de proportionnalité.

$$\binom{n}{p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}$$

2.5. Exemple

Pour le loto, on choisit 6 numéros parmi 49 de 1 à 49.

Le nombre de possibilités distinctes de remplir le ticket de jeu est :

$$\frac{49!}{6!(49-6!)}=\frac{49!}{6!\,43!}=\frac{44\times45\times46\times47\times48\times49}{1\times2\times3\times4\times5\times6}=44\times3\times46\times47\times49=13\,583\,816$$

3. Formule du binôme

3.1. Propriétés

$\binom{n}{0}=1$ Nombre de parties de E ayant 0 éléments : 1 seule : $\varnothing$.

$\binom{n}{n}=1$ Nombre de parties de E ayant n éléments : 1 seule : E.

$\binom{n}{1}=n$ Nombre de parties de E ayant 1 élément : n.

$\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$ $\binom{n}{p}=\dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}=\binom{n}{n-p}$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

3.2. Formule de Pascal

n est un entier naturel non nul et p est un entier naturel tel que : $0 \leqslant p \leqslant n-1$. On a :

$$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}$$

Démonstration :

$$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\frac{n!}{p!(n-p)!}+\frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!}$$

$$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left[\frac{1}{n-p}+\frac{1}{p+1}\right]$$

$$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left[\frac{p+1+n-p}{(n-p)(p+1)}\right]$$

$$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\frac{n!(n+1)}{p!(p+1)(n-p-1)!(n-p)}$$

$$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\frac{n!(n+1)}{(p+1)!(n-p)!}$$

$$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}$$

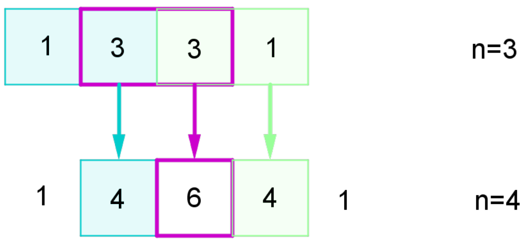
3.3. Triangle de Pascal

On peut donc déterminer pour une valeur de n fixée les nombres $\binom{n}{k}$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$ en utilisant un tableau à double entrée et la formule de Pascal. On obtient un triangle.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

En particulier, en utilisant la formule de Pascal, on passe de $n=3$ à $n=4$ en utilisant :



3.4. Formule du binôme

a et b sont deux nombres réels (ou deux nombres complexes) et n un entier naturel non nul, on a :

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{p}a^{n-p}b^p+\ldots+b^n$$

Démonstration :

Le développement de $(a+b)^n=(a+b)\times(a+b)\times\ldots\times(a+b)$ est une somme de (n+1) termes dont chacun est le produit de n facteurs de a ou b (c'est à dire des termes de la forme $a^{n-p}\times b^p$ avec $0\leqslant p\leqslant n$)

Le coefficient de $a^{n-p}\times b^p$ est $\binom{n}{p}$ (car on choisit b dans p facteurs (a+b) et a dans (n-p) facteurs (a+b).

Remarque :

$a^n=\binom{n}{0}a^n b^0$ et $b^n=\binom{n}{n}a^0 b^n$

4. Applications aux probabilités

4.1. Jeux de cartes

On considère un jeu de 32 cartes ; On extrait au hasard et simultanément 5 cartes du jeu (on dira que l'on extrait une main de 5 cartes).

a) Combien de mains de 5 cartes peut-on extraire du jeu ?

Le nombre de mains de 5 cartes que l'on peut extraire du jeu est le nombre de parties de 5 éléments d'un ensemble de 32 éléments, donc :

$\binom{32}{5}=\frac{32!}{5!\,27!}=201\,376$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

b) Soit A l'événement : on extrait une une main de 5 cartes contenant exactement un roi. Calculer la probabilité de A.

Les tirages s'effectuent au hasard donc la loi est équirépartie.

$card\ A=\binom{4}{1}\times\binom{28}{4}$ Car dans le jeu de 32 cartes il y a 4 rois et 28 cartes qui ne sont pas des rois.

$card\ A=4\times\frac{28!}{4!24!}=81\,900$

$p(A)=\frac{81900}{201376}=\frac{2925}{7192}\approx 0{,}407$

c) Soit B l'événement : on extrait une main de 5 cartes contenant au moins un roi. Calculer la probabilité de B.

On considère $\overline{B}$: «on extrait une main de 5 cartes ne contenant aucun roi » (c'est à dire 5 cartes parmi les 28 cartes qui ne sont pas des rois).

$card\ \overline{B}=\binom{28}{5}=\frac{28!}{5!23!}=98\,280$

$P(\overline{B})=\frac{98\,280}{201\,376}=\frac{1\,755}{3\,596}$

$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{1\,755}{3\,596}=\frac{1\,841}{3\,596}\approx 0{,}512$

d) Soit C l'événement : on extrait une main de 5 cartes contenant exactement un cœur. Calculer la probabilité de C.

Dans le jeu de cartes, il y a 8 cœurs et 24 cartes distinctes d'un cœur.

$card\ C=\binom{8}{1}\times\binom{24}{4}=8\times\frac{24!}{4!20!}=85\,008$

$P(C)=\frac{85\,008}{201\,376}=\frac{759}{1\,798}\approx 0{,}422$

e) Soit D l'événement : on extrait une main de 5 cartes contenant au moins un cœur. Calculer la probabilité de D.

On considère $\overline{D}$: «on extrait une main de 5 cartes ne contenant aucun cœur » (c'est à dire 5 cartes parmi les 24 cartes qui ne sont pas des cœurs).

$card\ \overline{D}=\binom{24}{5}=\frac{24!}{5!19!}=42\,504$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$P(\overline{D})=\frac{42\,504}{201\,376}=\frac{759}{3\,596}$

$P(D)=1-P(\overline{D})=1-\frac{759}{3\,596}=\frac{2\,637}{3\,596}\approx 0{,}733$

f) Soit E l'événement : on extrait une main de 5 cartes contenant un roi et un cœur. Calculer la probabilité de E.

Dans le jeu de cartes, le roi de cœur est un cœur et un roi.

On effectue une partition des 32 cartes de la manière suivante :

- le roi de cœur (1 carte)
- les rois distincts du roi de cœur (3 cartes)
- les cœurs distincts du roi de cœur (7 cartes)
- les cartes distinctes d'un roi et d'un cœur (21 cartes)

$E=E_1\cup E_2$

E_1 : on extrait le roi de cœur et 4 cartes distinctes d'un roi et d'un cœur.

E_2 : on extrait un roi distinct du roi de cœur et 1 cœur distinct du roi de cœur et 3 cartes distinctes d'un roi et d'un cœur.

$E_1\cap E_2=\varnothing$

Les événements E_1 et E_2 sont incompatibles donc $P(E)=P(E_1)+P(E_2)$

$card\ E_1=\binom{1}{1}\times\binom{21}{4}=1\times\frac{21!}{4!17!}=5\,985$

$P(E_1)=\frac{5985}{201376}=\frac{855}{28768}$

$card\ E_2=\binom{3}{1}\times\binom{7}{1}\times\binom{21}{3}=3\times 7\times\frac{21!}{3!18!}=27\,930$

$P(E_2)=\frac{27\,930}{201\,376}=\frac{1995}{14\,384}$

$P(E)=\frac{855}{28\,768}+\frac{1995}{14\,384}=\frac{4845}{28768}\approx 0{,}168$

4.2. Exemples de tirages

On dispose d'une urne où se trouvent sept boules numérotées de 1 à 7.

a) Tirages successifs avec remise

On tire une boule au hasard, on note son numéro et on la remet dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

✔ Quel est le nombre de résultats possibles après 5 tirages ? 7 tirages ? 10 tirages ?

Pour 5 tirages : une éventualité est une 5-liste d'éléments de E={1;2;3;4;5;6;7}

$card\ E^5 = 7^5 = 16\,807$

Pour 7 tirages : une éventualité est une 7-liste d'éléments de E={1;2;3;4;5;6;7}

$card\ E^7 = 7^7 = 823\,543$

Pour 10 tirages : une éventualité est une 10-liste d'éléments de E={1;2;3;4;5;6;7}

$card\ E^{10} = 7^{10} = 282\,475\,249$

✔ A est l'événement : « on obtient aucun numéro pair ». Calculer la probabilité de A lorsque l'on effectue 5 tirages ? 7 tirages ? 10 tirages ?

Dans E, il y a 3 numéros pairs : 2 ; 4 ; 6 et 4 numéros impairs : 1 ; 3 ; 5 ; 7

Pour 5 tirages : il faut 5 numéros impairs :

$card\ A = 4^5 = 1024$

$P(A) = \dfrac{1024}{16\,807} \approx 0{,}061$

Pour 7 tirages : il faut 7 numéros impairs :

$card\ A = 4^7 = 16\,384$

$P(A) = \dfrac{16\,384}{823\,553} \approx 0{,}02$

Pour 10 tirages : il faut 10 numéros impairs :

$card\ A = 4^{10} = 1\,048\,576$

$P(A) = \dfrac{1\,048\,576}{282\,475\,249} \approx 0{,}004$

✔ B est l'événement : « on obtient au moins un numéro pair ». Calculer la probabilité de B lorsque l'on effectue 5 tirages ? 7 tirages ? 10 tirages ?

$B = \overline{A}$, donc $P(B) = 1 - P(A)$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Pour 5 tirages : $P(B)=\frac{15\,783}{16\,807}\approx 0{,}939$

Pour 7 tirages : $P(B)\approx 0{,}98$

Pour 10 tirages : $P(B)\approx 0{,}986$

✔ C est l'événement :« on obtient exactement deux numéros pairs et trois numéros impairs lorsque l'on effectue 5 tirages ». Calculer la probabilité de C.

Il faut 2 numéros parmi les 3 pairs et 3 numéros parmi les 4 impairs mais il faut aussi placer les numéros pairs par rapport aux numéros impairs.
Il y a $\binom{5}{2}$ possibilités de placer les 2 numéros pairs par rapport aux 5 tirages.

$card\ C=\binom{5}{2}\times 2^2\times 3^3=\frac{5!}{2!3!}=216$

$P(C)=\frac{216}{16807}\approx 0{,}013$

b) Tirages successifs sans remise

On tire une boule au hasard, on note son numéro et on ne la remet pas dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.
Répondre aux mêmes questions que pour a)

✔ Quel est le nombre de résultats possibles après 5 tirages ? 7 tirages ? 10 tirages ?

Pour 5 tirages : une éventualité est une 5-liste d'éléments de E deux à deux distincts. Le nombre de 5-liste d'éléments de E deux à deux distincts est $\frac{7!}{(7-5)!}=2\,520$

Pour 7 tirages : une éventualité est une 7-liste d'éléments de E deux à deux distincts. Le nombre de 7-liste d'éléments de E deux à deux distincts est $7!=5\,040$

Pour 10 tirages : il n'est pas possible d'extraire successivement sans remise 10 boules d'une urne contenant 7 boules. Le nombre de possibilités est 0.

✔ A est l'événement : « on obtient aucun numéro pair ». Calculer la probabilité de A lorsque l'on effectue 5 tirages ? 7 tirages ?

Pour 5 tirages : Il n'y a que 4 numéros impairs dans l'urne.

A=∅.

P(A)=0

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

De même :

Pour 7 tirages :A=∅.

P(A)=0

✔ B est l'événement : « on obtient au moins un numéro pair ». Calculer la probabilité de B lorsque l'on effectue 5 tirages ? 7 tirages ?

$B=\overline{A}$, donc $P(B)=1-P(A)$

Pour 5 tirages : $P(B)=1-0=1$

Pour 7 tirages : $P(B)=1-0=1$

✔ C est l'événement :« on obtient exactement deux numéros pairs et trois numéros impairs lorsque l'on effectue 5 tirages ». Calculer la probabilité de C .

$$card\ C=\binom{5}{2}\times\frac{3!}{1!}\times\frac{4!}{1!}=1\,440$$
$$P(C)=\frac{1\,440}{2\,520}=\frac{4}{7}\approx 0{,}571$$

c) <u>Tirages simultanés</u>

On tire au hasard simultanément plusieurs boules de l'urne.

Répondre aux mêmes questions que pour a)

✔ Quel est le nombre de résultats possibles après 5 tirages ? 7 tirages ? 10 tirages ?

Pour 5 tirages : une éventualité est une combinaison de 5 éléments des 7 éléments de E.

Le nombre de combinaisons de 5 éléments d'un ensemble de 7 éléments est : $\binom{7}{5}=\frac{7!}{5!(7-5)!}=21$

Pour 7 tirages : une éventualité est une combinaison de 7 éléments des 7 éléments de E.

Le nombre de combinaisons de 7 éléments d'un ensemble de 7 éléments est : $\binom{7}{7}=\frac{7!}{7!0!}=1$

Pour 10 tirages : il n'est pas possible d'extraire simultanément 10 boules d'une urne contenant 7 boules. Le nombre de possibilités est 0.

✔ A est l'événement : « on obtient aucun numéro pair ». Calculer la probabilité de A lorsque l'on effectue 5 tirages ? 7 tirages ?

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Pour 5 tirages : Il n'y a que 4 numéros impairs dans l'urne.

A=∅.

P(A)=0

De même :

Pour 7 tirages :A=∅.

P(A)=0

✔ B est l'événement : « on obtient au moins un numéro pair ». Calculer la probabilité de B lorsque l'on effectue 5 tirages ? 7 tirages ?

$B=\overline{A}$, donc $P(B)=1-P(A)$

Pour 5 tirages : $P(B)=1-0=1$

Pour 7 tirages : $P(B)=1-0=1$

✔ C est l'événement :« on obtient exactement deux numéros pairs et trois numéros impairs lorsque l'on effectue 5 tirages ». Calculer la probabilité de C .

$$card\ C=\binom{3}{2}\times\binom{4}{3}=3\times4=12$$
$$P(C)=\frac{12}{21}\approx0{,}571$$

4.3. Anagrammes

a) On écrit les 7 lettres du mot TIRAGES sur sept boules que l'on place dans une urne.
On extrait au hasard une boule de l'urne, on note la lettre puis on extrait de nouveau une boule sans remettre la précédente dans l'urne. On note la nouvelle lettre à droite de la précédente puis on effectue de la même manière cinq nouveau tirages sans remise.
On obtient alors une anagramme du mot TIRAGES.
Calculer la probabilité de l'événement F : « les deux premières lettres de l'anagramme sont T et I.

Les sept lettres du mot TIRAGES sont deux à deux distincts donc une éventualité est une permutation des 7 lettres du mot TIRAGES.
Le cardinal de l'univers est $7!=1\times2\times3\times4\times5\times6\times7=5\,040$.
Les tirages s'effectuent au hasard donc la loi est équirépartie.
Pour déterminer une éventualité appartenant à F, il suffit d'obtenir une permutation de 5 lettres du mot TIRAGES distinctes de T et I, donc $card\ F=5!=1\times2\times3\times4\times5=120$

$$P(F)=\frac{120}{5\,040}=\frac{1}{42}\approx0{,}024$$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

b) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot : ANAGRAMMES ?

Les 10 lettres du mot ANAGRAMMES ne sont pas distinctes deux à deux. (il y a 3 lettres A et 2 lettres M).

On différencie les 10 lettres du mot ANAGRAMMES par exemple en coloriant les 3 lettres A de couleurs différentes (rouge, blanc, vert) et les 2 lettres M(blanc et jaune).
On obtient alors $10!$ anagrammes du mot ANAGRAMMES.

Si on enlève les couleurs des lettres A, certaines anagrammes deviennent alors identiques.
Si on élimine les doublons, il en reste $3!$ fois moins. ($3!$ est le nombre de permutations d'un ensemble de 3 éléments, par exemple pour les couleurs RBV ; RVB ; BRV ; BVR ; VRB ; VBR).

Si on enlève les couleurs des 2 lettres M, il en reste $2!$ fois moins.

On obtient donc $\frac{10!}{3!2!}$ anagrammes du mot ANAGRAMMES.
$\frac{10!}{3!2!}$ =302 400

c) Combien de nombres de 6 chiffres peut-on écrire avec les 6 chiffres des nombres suivants :
A=124 679
B=111 234
C=122 335

Les 6 chiffres de A sont distincts deux à deux. Le nombre de 6 chiffres que l'on peut écrire avec les 6 chiffres de A est le nombre d'anagrammes d'un mot de 6 lettres deux à deux distinctes, donc :
$6!=1\times2\times3\times4\times5\times6=720$.

Pour B, il y a 3 chiffres 1 et les autres chiffres sont distincts deux à deux.
On obtient : $\frac{6!}{3!}=4\times5\times6=120$.

Pour C, il y a 2 chiffres 2 et 2 chiffres 3 et les autres chiffres sont distincts deux à deux.
On obtient : $\frac{6!}{2!2!}=180$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés