## Exercice

Pour tout nombre réel $x$ et tout entier naturel non nul $n$ :

$$f(x)=(1+x)^n=1+\binom{n}{1}x^1+\binom{n}{2}x^2+\ldots+\binom{n}{p}x^p+\ldots+\binom{n}{n-1}x^{n-1}+\binom{n}{n}x^n .$$

(Remarque : on peut écrire : $1=\binom{n}{0}x^0$ )

1. Calculer :

$$S=1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{p}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$$

2. Calculer :

$$S_1=1\times\binom{n}{1}+2\times\binom{n}{2}+\ldots+p\times\binom{n}{p}+\ldots+(n-1)\binom{n}{n-1}+n\binom{n}{n} .$$

**Correction :**

1. $S=1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{p}+...+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$

$\boxed{S=f(1)=(1+1)^n=2^n}$

2.

$S_1=1\times\binom{n}{1}+2\times\binom{n}{2}+...+p\times\binom{n}{p}+...+(n-1)\binom{n}{n-1}+n\binom{n}{n}$.

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$f'(x)=n(1+x)^{n-1}=0+1\times\binom{n}{1}x^0+2\times\binom{n}{2}x^1+...+p\times\binom{n}{p}x^{p-1}+...+(n-1)\binom{n}{n-1}x^{n-2}+n\binom{n}{n}x^{n-1}$.

Pour $x=1$, on obtient $S_1$ donc $\boxed{S_1=n(1+1)^{n-1}=n2^{n-1}}$.