

Exercice

Dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien y-a-t-il de mains de 5 cartes contenant 1 roi et 2 cœurs.
2. Combien y-a-t-il de mains de 5 cartes contenant 1 roi et une dame et 2 cœurs.

Correction :

1. E est l'ensemble des mains de 5 cartes contenant 1 roi et 2 cœurs.

On effectue une partition des 32 cartes du jeu de la manière suivante :

- le roi de cœur (1 carte)
- les rois distincts du roi de cœur (3 cartes)
- les cœurs distincts du roi (7 cartes)
- les cartes distinctes d'un roi et d'un cœur (21 cartes)

$$E = E_1 \cup E_2$$

avec E_1 : on extrait le roi de cœur et 1 cœur distinct du roi et 3 cartes distinctes d'un roi et d'un cœur.

E_2 : on extrait un roi distinct du roi de cœur et 2 cœurs distincts du roi et 2 cartes distinctes d'un roi et d'un cœur.

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset, \text{ donc, } \text{card } E = \text{card } E_1 + \text{card } E_2.$$

$$\text{Card } E_1 = \binom{1}{1} \times \binom{7}{1} \times \binom{21}{3} = 1 \times 7 \times \frac{21!}{3!18!} = \mathbf{9\ 310}$$

$$\text{Card } E_2 = \binom{3}{1} \times \binom{7}{2} \times \binom{21}{2} = 3 \times \frac{7!}{2!5!} \times \frac{21!}{2!19!} = \mathbf{13\ 230}$$

$$\text{card } E = \mathbf{22\ 540}$$

2. F est l'ensemble des mains de 5 cartes contenant 1 roi et une dame et 2 cœurs.

On effectue une partition des 32 cartes du jeu de la manière suivante :

- le roi de cœur (1 carte)
- la dame de cœur (1 carte)
- les rois distincts du roi de cœur (3 cartes)
- les dames distinctes de la dame de cœur (3 cartes)
- les cœurs distincts du roi et de la dame (6 cartes)
- les cartes distinctes d'un roi, d'une dame et d'un cœur (18 cartes)

$$F = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4$$

avec F_1 : on extrait le roi de cœur et la dame de cœur et 3 cartes distinctes d'un roi et d'une dame et d'un cœur.

F_2 : on extrait le roi de cœur et une dame distincte de la dame de cœur et 1 cœur distinct du roi et de la dame et 2 cartes distinctes d'un roi et d'une dame et d'un cœur.

F_3 : on extrait un roi distinct du roi de cœur et la dame de cœur et 1 cœur distinct du roi et de la dame et 2 cartes distinctes d'un roi et d'une dame et d'un cœur.

F_4 : on extrait un roi distinct du roi de cœur et une dame distincte de la dame de cœur et 2 cœurs distincts du roi et de la dame et 1 carte distincte d'un roi et d'une dame et d'un cœur.

$$F_1 \cap F_2 = \emptyset, F_1 \cap F_3 = \emptyset, F_1 \cap F_4 = \emptyset, F_2 \cap F_3 = \emptyset, F_2 \cap F_4 = \emptyset, F_3 \cap F_4 = \emptyset,$$

donc, $\text{card } F = \text{card } F_1 + \text{card } F_2 + \text{card } F_3 + \text{card } F_4$.

$$\text{Card } F_1 = \binom{1}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{18}{3} = 1 \times 1 \times \frac{18!}{3!15!} = \mathbf{816}$$

$$\text{Card } F_2 = \binom{1}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{18}{2} = 1 \times 3 \times 6 \times \frac{18!}{2!16!} = \mathbf{2\,754}$$

$$\text{Card } F_3 = \binom{3}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{18}{2} = \mathbf{2\,754}$$

$$\text{Card } F_4 = \binom{3}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{6}{2} \times \binom{18}{1} = 3 \times 3 \times \frac{6!}{2!4!} \times 18 = \mathbf{2\,430}$$

$$\text{card } F = \mathbf{8\,754}$$