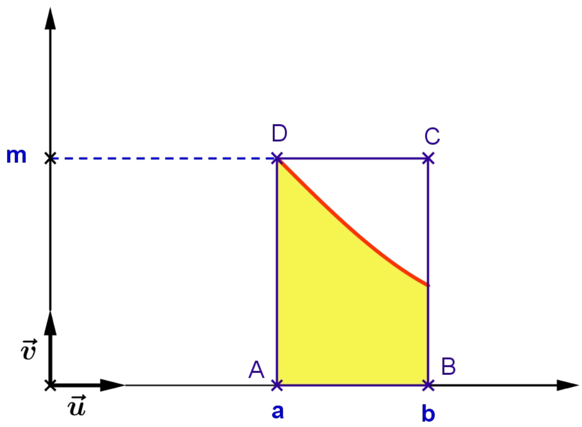
Exercice Approche probabiliste d'une intégrale. Méthode de MONTE-CARLO

1. <u>Méthode</u>

a et b sont des nombres réels tels que $a \leqslant b$, f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$, soit m un majorant de f sur $[a;b]$.

$(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormal du plan.

$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est l'aire en U.A de la partie du plan comprise entre la représentation graphique de f sur $[a;b]$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.



$A(a;0)$ $B(b;0)$ $C(b;m)$ $D(a;m)$

L'aire du rectangle ABCD est : $\mathcal{A}=m(b-a)$

Si on choisit au hasard un point $M(x;y)$ appartenant au rectangle ABCD ($a\leqslant x\leqslant b$ et $0\leqslant y\leqslant m$), la probabilité pour que ce point soit situé sous ou sur la courbe $\mathcal{C}_f$ est $p=\frac{I}{\mathcal{A}}$.

La méthode de MONTE-CARLO consiste à choisir successivement au hasard n points dans le rectangle ABCD, pour chaque point on contrôle s'il est sous ou sur la courbe $\mathcal{C}_f$ et on compte le nombre N de points sous ou sur $\mathcal{C}_f$. On note $f_n=\frac{N}{n}$.

f_n est une « valeur approchée » de p et on obtient pour « valeur approchée » de I : $f_n\times\mathcal{A}$.

<u>Utilisation du tableur d'openoffice</u> :

En $A_1=a+(b-a)^3_2$ ALEA()

On choisit un nombre au hasard entre a et b.

En $B_1=m^3_2$ ALEA()

On choisit un nombre au hasard entre 0 et m.

En C_1=Si($f(A_1)-B_1<0$;0;1)

Si $f(A_1)-B_1<0$ alors le point $M(A_1;B_1)$ est en-dessous de $\mathcal{C}_f$ et on écrit 0 en C_1 sinon en écrit 1.

On étire jusque $A_{10\,000}$; $B_{10\,000}$; $C_{10\,000}$

En E_2=Somme(C_1 : $C_{10\,000}$)/10 000

On obtient $f_{10\,000}$ la fréquence de l'échantillon.

2. Exemple 1

$a=0$ $\qquad b=1$ $\qquad f(x)=x^2$

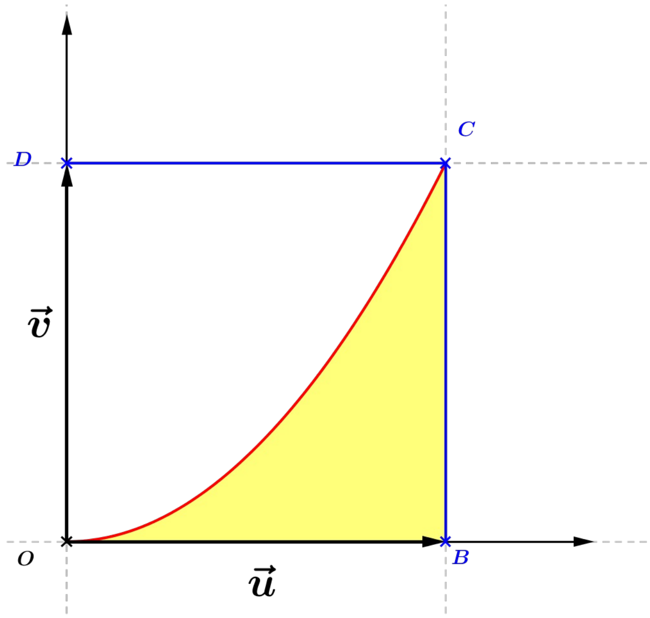
Si $0\leqslant x\leqslant 1$ alors $0^2\leqslant x^2\leqslant 1^2$, c'est à dire $0\leqslant x^2\leqslant 1$.

On choisit $m=1$

Donc l'aire de ABCD est 1 U.A et on obtient f_n une valeur approchée de p .

L'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $[0;1]$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$ est : $I=\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}U.A$ et $p=\frac{1}{3}$.

Représentation graphique :



Pour $n=10000$

On détermine un intervalle de fluctuation asymptotique à 95%

$$I_{10000}=\left[\frac{1}{3}-1,96\times\frac{\sqrt{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}}{100};\frac{1}{3}+1,96\times\frac{\sqrt{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}}{100}\right]$$

$$I_{10000}=\left[\frac{1}{3}-1,96\times\frac{\sqrt{2}}{300};\frac{1}{3}+1,96\times\frac{\sqrt{2}}{300}\right]$$

$$I_{10000}\approx[0,325;0,343]$$

On utilise pour choisir les échantillons et déterminer les fréquences de ces échantillons.

A_1=ALEA()

B_1=ALEA()

C_1=SI(f(A_1)-B_1<0;0;1)

On étire jusque $n=10\ 000$

En E_2=Somme(C_1 : $C_{10\ 000}$)/10 000

On obtient (on effectue 5 fois le programme) : 0,331 $\qquad$ 0,325 $\qquad$ 0,338 $\qquad$ 0,336 $\qquad$ 0,343

3. Exemple 2

$a=0$ $b=1$ $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ pour $x\in[0;1]$

$m=1$

1. Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ sur [0;1].

2. Déterminer la valeur exacte de $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

3. Déterminer un intervalle de fluctuation à 95% pour $n=10\ 000$

4. Utiliser un tableur pour donner la fréquence (pour $n=10\ 000$)pour 5 échantillons.

4. Exemple 3

$a=0$ $b=1$ $m=1$ $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ pour $x\in[0;1]$. On ne cherchera pas à calculer $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

1. Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ sur [0;1].

2. Utiliser un tableur pour donner la fréquence (pour $n=10\ 000$). Écrire un intervalle de confiance au seuil de 0,95.

3. Déterminer la fréquence sur d'autres échantillons (peut-on effectuer une conjecture?)

5. Exemple 4

$a=0$ $b=1$ $m=0{,}5$ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ pour $x\in[0;1]$. On ne cherchera pas à calculer $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

1. Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ sur [0;1].

2. Utiliser un tableur pour donner la fréquence (pour $n=10\ 000$). Écrire un intervalle de confiance au seuil de 0,95.

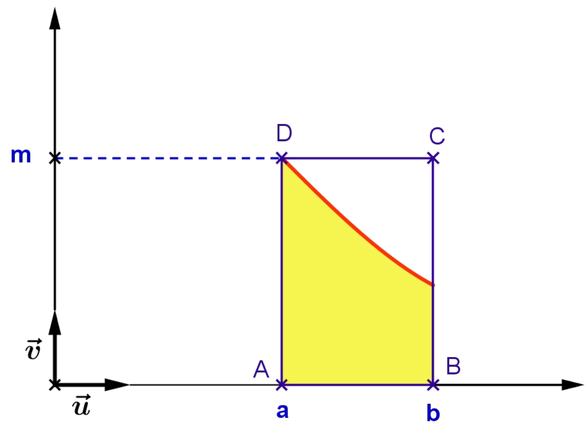
Correction :

1. Méthode

a et b sont des nombres réels tels que $a \leqslant b$, f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$, soit m un majorant de f sur $[a;b]$.

$(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormal du plan.

$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est l'aire en U.A de la partie du plan comprise entre la représentation graphique de f sur $[a;b]$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.



$A(a;0)$ $B(b;0)$ $C(b;m)$ $D(a;m)$

L'aire du rectangle ABCD est : $\mathscr{A}=m(b-a)$

Si on choisit au hasard un point $M(x;y)$ appartenant au rectangle ABCD ($a \leqslant x \leqslant b$ et $0 \leqslant y \leqslant m$), la probabilité pour que ce point soit situé sous ou sur la courbe $\mathscr{C}_f$ est $p=\frac{I}{\mathscr{A}}$.

La méthode de MONTE-CARLO consiste à choisir successivement au hasard n points dans le rectangle ABCD, pour chaque point on contrôle s'il est sous ou sur la courbe $\mathscr{C}_f$ et on compte le nombre N de points sous ou sur $\mathscr{C}_f$. On note $f_n=\frac{N}{n}$.

f_n est une « valeur approchée » de p et on obtient pour « valeur approchée » de I : $f_n \times \mathscr{A}$.

Utilisation du tableur d'openoffice :

En $A_1=a+(b-a)*$ALEA()

On choisit un nombre au hasard entre a et b .

En $B_1=m*$ALEA()

On choisit un nombre au hasard entre 0 et m .

En C_1=Si($f(A_1)-B_1<0$;0;1)

Si $f(A_1)-B_1<0$ alors le point $M(A_1;B_1)$ est en-dessous de $\mathscr{C}_f$ et on écrit 0 en C_1 sinon en écrit 1.

On étire jusque $A_{10\,000}$; $B_{10\,000}$; $C_{10\,000}$

En E_2=Somme(C_1 : $C_{10\,000}$)/10 000

On obtient $f_{10\,000}$ la fréquence de l'échantillon.

2. Exemple 1

$a=0$ $b=1$ $f(x)=x^2$

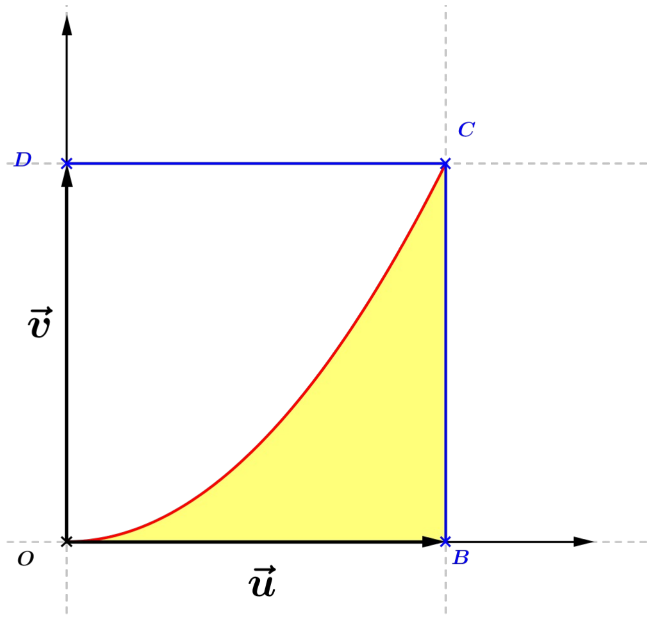
Si $0\leqslant x\leqslant 1$ alors $0^2\leqslant x^2\leqslant 1^2$, c'est à dire $0\leqslant x^2\leqslant 1$.

On choisit $m=1$

Donc l'aire de ABCD est 1 U.A et on obtient f_n une valeur approchée de p .

L'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $[0;1]$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$ est : $I=\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}U.A$ et $p=\frac{1}{3}$.

Représentation graphique :



Pour $n=10000$

On détermine un intervalle de fluctuation asymptotique à 95%

$$I_{10000}=\left[\frac{1}{3}-1{,}96\times\frac{\sqrt{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}}{100};\frac{1}{3}+1{,}96\times\frac{\sqrt{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}}{100}\right]$$

$$I_{10000}=\left[\frac{1}{3}-1{,}96\times\frac{\sqrt{2}}{300};\frac{1}{3}+1{,}96\times\frac{\sqrt{2}}{300}\right]$$

$$I_{10000}\approx[0{,}325;0{,}343]$$

On utilise pour choisir les échantillons et déterminer les fréquences de ces échantillons.

A_1=ALEA()

B_1=ALEA()

C_1=SI(*f*(A_1)-B_1<0;0;1)

On étire jusque $n=10\,000$

En E_2=Somme(C_1 : $C_{10\,000}$)/10 000

On obtient (on effectue 5 fois le programme) : 0,331 0,325 0,338 0,336 0,343

3. Exemple 2

$a=0$ $b=1$ $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ pour $x\in[0;1]$

$m=1$

1. Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ sur [0;1].

2. Déterminer la valeur exacte de $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

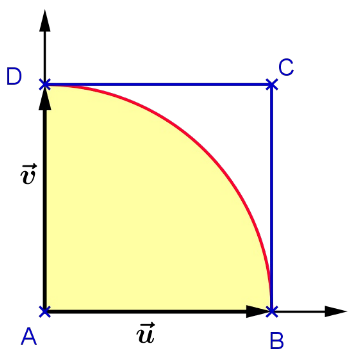
3. Déterminer un intervalle de fluctuation à 95% pour $n=10\ 000$

4. Utiliser un tableur pour donner la fréquence (pour $n=10\ 000$)pour 5 échantillons.

1. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ pour $x\in[0;1]$

donc $y^2=1-x^2$ et $x^2+y^2=1$

Donc, la courbe représentative de f sur [0;1] est le quart de cercle de centre O et de rayon 1 tel que $x\in[0;1]$ et $y\geqslant 0$.



2. $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ est l'aire en U.A d'un quart de cercle de rayon 1, donc $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$.

3. $\mathscr{A}$ est l'aire du carré ABCD en U.A donc $\mathscr{A}=1$

Donc, $p=\frac{I}{\mathscr{A}}=\frac{\pi}{4}=0{,}7854$

$$I=\left[\frac{\pi}{4}-1{,}96\times\sqrt{\frac{\frac{\pi}{4}\times(1-\frac{\pi}{4})}{10\,000}};\frac{\pi}{4}+1{,}96\times\sqrt{\frac{\frac{\pi}{4}\times(1-\frac{\pi}{4})}{10\,000}}\right]$$

$$1{,}96\times\sqrt{\frac{\frac{\pi}{4}\times(1-\frac{\pi}{4})}{10\,000}}=0{,}00807\ldots$$

$$\frac{\pi}{4}-1{,}96\times\sqrt{\frac{\frac{\pi}{4}\times(1-\frac{\pi}{4})}{10\,000}}=0{,}7854-0{,}0081=0{,}7773$$

$$\frac{\pi}{4}+1{,}96\times\sqrt{\frac{\frac{\pi}{4}\times\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}{10\,000}}=0{,}7854+0{,}0081=0{,}7935$$

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95 est $I=[0{,}7773\,;0{,}7935]$

4. A_1=ALEA()

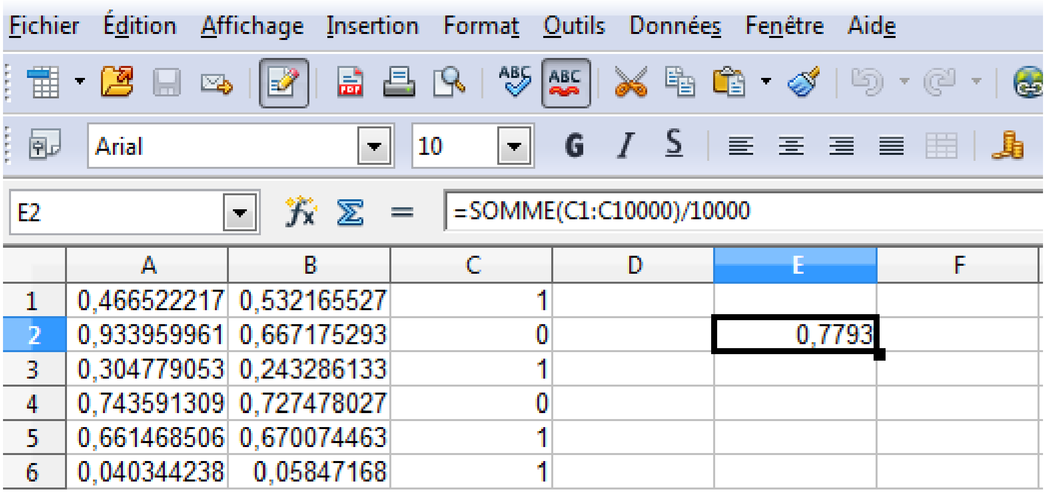
B_1=ALEA()

$C1=SI(\sqrt{1-A1^2}-B1<0;0;1)$

On étire jusque $n=10\,000$

En E_2=Somme(C_1 : $C_{10\,000}$)/10 000

On obtient (on effectue 5 fois le programme) : 0,7846 0,781 0,7818 0,7848 0,7793



	A	B	C	D	E	F
1	0,466522217	0,532165527	1			
2	0,933959961	0,667175293	0		0,7793	
3	0,304779053	0,243286133	1			
4	0,743591309	0,727478027	0			
5	0,661468506	0,670074463	1			
6	0,040344238	0,05847168	1			

4. <u>Exemple 3</u>

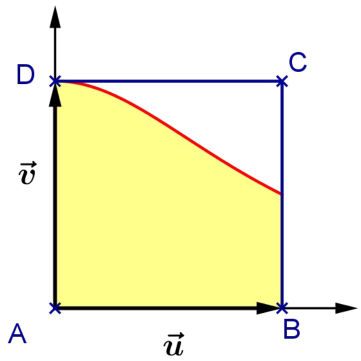
$a=0$ $b=1$ $m=1$ $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ pour $x\in[0;1]$. On ne cherchera pas à calculer $I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ sur [0;1].

$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ pour $x\in[0;1]$

f est dérivable sur $[0;1]$. $f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

x	0		1
Signe de f ' (x)	0	–	
Variations de f(x)	1	↘	$\frac{1}{2}$



2. Utiliser un tableur pour donner la fréquence (pour $n=10\ 000$). Écrire un intervalle de confiance au seuil de 0,95.

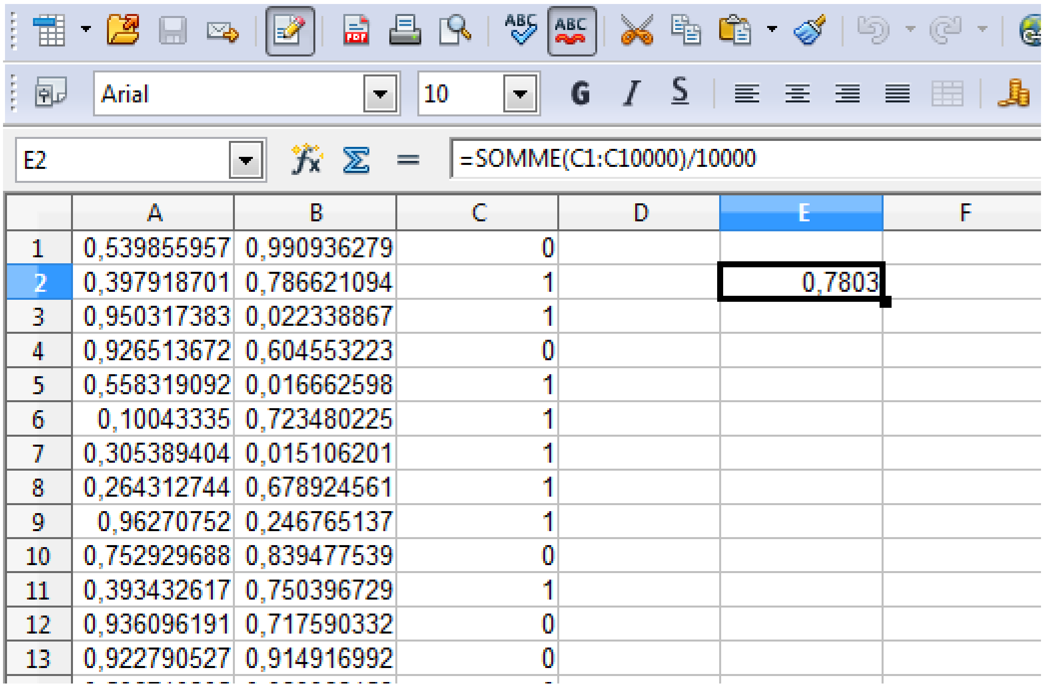
A_1=ALEA()

B_1=ALEA()

$C1=\text{SI}\left(\frac{1}{1+A1^2}-B1<0;0;1\right)$

On étire jusque $n=10\ 000$

En E_2=Somme(C_1 : $C_{10\ 000}$)/10 000



	A	B	C	D	E	F
1	0,539855957	0,990936279	0			
2	0,397918701	0,786621094	1		0,7803	
3	0,950317383	0,022338867	1			
4	0,926513672	0,604553223	0			
5	0,558319092	0,016662598	1			
6	0,10043335	0,723480225	1			
7	0,305389404	0,015106201	1			
8	0,264312744	0,678924561	1			
9	0,96270752	0,246765137	1			
10	0,752929688	0,839477539	0			
11	0,393432617	0,750396729	1			
12	0,936096191	0,717590332	0			
13	0,922790527	0,914916992	0			

On obtient $f=0{,}7803$

L'intervalle de confiance au seuil de 0,95 est $I=\left[f-\frac{1}{100};f+\frac{1}{100}\right]$

$I=[0{,}7703;0{,}7903]$

3. Déterminer la fréquence sur d'autres échantillons (peut-on effectuer une conjecture?)

Pour 10 échantillons, on obtient :

0,7831-0,7826-0,7888-0,7789-0,7854-0,7853-0,7869-0,7805-0,7828-0,7877

On peut remarquer que les fréquences sont « proches » de celles de l'exercice précédent. On conjecture :

$$I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$$

5. <u>Exemple 4</u>

$a=0$ $b=1$ $m=0{,}5$ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ pour $x\in[0;1]$. On ne cherchera pas à calculer $I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ sur [0;1].

Cette fonction est étudiée dans le cours sur ℝ

f est décroissante sur [0;1].

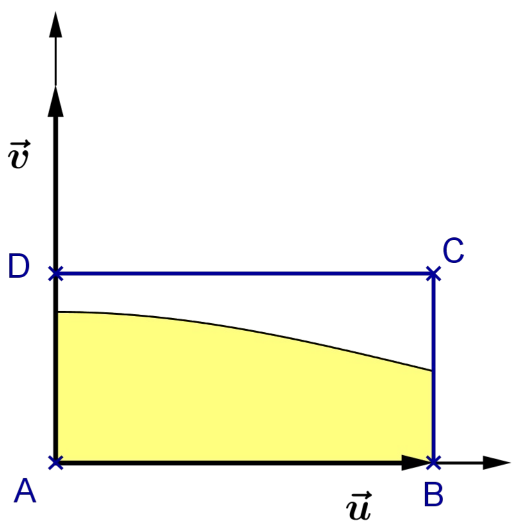
$$f(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\approx 0{,}4$$

$$f(1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-1}$$

$I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire en U.A de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $[0;1]$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.

$\mathscr{A}$=aire en U.A du rectangle ABCD= $1\times 0{,}5$ =0,5U.A

$p=\frac{I}{\mathscr{A}}$ $I=\frac{p}{2}$



2. Utiliser un tableur pour donner la fréquence (pour $n=10\,000$). Écrire un intervalle de confiance au seuil de 0,95.

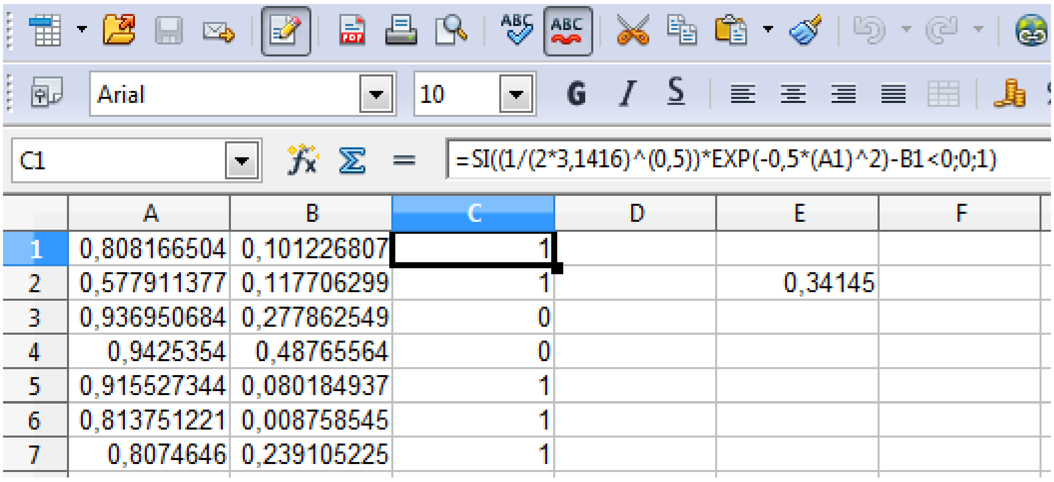
A_1=ALEA()

B_1=ALEA()

$$C1=SI\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}A1^2}-B1<0;0;1\right)$$

On étire jusque $n=10\,000$

En E_2=Somme(C_1 : $C_{10\,000}$)/10 000



	A	B	C	D	E	F
1	0,808166504	0,101226807	1			
2	0,577911377	0,117706299	1		0,34145	
3	0,936950684	0,277862549	0			
4	0,9425354	0,48765564	0			
5	0,915527344	0,080184937	1			
6	0,813751221	0,008758545	1			
7	0,8074646	0,239105225	1			

On obtient $f=0{,}34145$

L'intervalle de confiance au seuil de 0,95 est $I=\left[f-\frac{1}{100};f+\frac{1}{100}\right]$

$I=[0{,}33145;0{,}0{,}35145]$