Indépendance en probabilité.

Loi de Bernoulli. Loi binomiale.

1. Indépendance

1.1. Proposition

P est une probabilité sur Ω.

Soient A et B deux événements tels que $P(A)\neq 0$ et $P(B)\neq 0$. Il y a équivalence entre les 3 propriétés suivantes :

- $P_B(A)=P(A)$
- $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$
- $P_A(B)=P(B)$

<u>Démonstration :</u>

- Si $P_B(A)=P(A)$ alors $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)$
  Donc, $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$
- Si $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ alors $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)$ donc $P_B(A)=P(A)$
- Si $P_A(B)=P(B)$ alors $\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=P(B)$ donc $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)=P_B(A)$

1.2. Définition

P est une probabilité sur Ω. A et B sont deux événements de Ω.

On dit que les événements A et B sont **indépendants** si et seulement si :

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

1.3. Remarque

Il ne faut pas confondre deux événements indépendants et deux événements incompatibles ($A\cap B=\varnothing$)

1.4. Exemples

On lance un dé cubique bien équilibré. Card Ω=6. La loi est équirépartie.

A est l'événement : « on obtient un chiffre pair ».

B est l'événement : « on obtient un multiple de 3 ».

C est l'événement : « on obtient 4 ».

card $A=3$ $\qquad P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

card $B=2$ $\qquad P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$A\cap B=\{6\}$ $\qquad P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$P(A)\times P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$, donc, les événements A et B sont indépendants.

card $C=\{4\}$ $\qquad P(C)=\frac{1}{6}$

$A\cap C=\{4\}$ $\qquad P(A\cap C)=\frac{1}{6}$

$P(A)\times P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

$P(A\cap C)=P(A)\times P(C)$, donc, les événements A et C ne sont pas indépendants.

1.5. Théorème

Si A et B sont deux événements indépendants alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration :

A et B sont deux événements indépendants alors $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

$\Omega=A\cup\overline{A}$ et $A\cap\overline{A}=\varnothing$

Donc, $B=(A\cup\overline{A})\cap B$

$B=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)$

Les événements $(A\cap B)$ et $(\overline{A}\cap B)$ sont incompatibles.

Donc, $P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)$

$P(B)=P(A)\times P(B)+P(\overline{A}\cap B)$

$P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A)\times P(B)$

$P(\overline{A}\cap B)=P(B)[1-P(A)]$

$P(\overline{A}\cap B)=P(B)\times P(\overline{A})$

Donc, les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.

1.6. Épreuves répétées indépendantes

a) Définition

On dit que des épreuves répétées sont **indépendantes** si et seulement si le résultat de l'une d'entre elles n'a aucune influence sur le résultat des autres.

b) Exemples

- On lance 5 fois un dé cubique bien équilibré. Une éventualité est une 5-liste d'éléments d'un ensemble de 6 éléments : {1;2;3;4;5;6}
  Exemple : (2 ; 3 ; 4 ; 2 ; 1)
  On admet que les lancers sont indépendants.
  Donc, $P(2;3;4;2;1)=P(2)\times P(3)\times P(4)\times P(2)\times P(1)=\left(\frac{1}{6}\right)^5$
- Si on considère des tirages successifs avec remise, on obtient aussi des épreuves répétées indépendantes.

1.7. Indépendance de deux variables aléatoires

P est une probabilité sur Ω.

On dit que **les variables aléatoires X et Y sont indépendantes** si et seulement si pour toute valeur de x prise par X et pour toute valeur y prise par Y, on ait :

$P((X=x)\cap(Y=y))=P(X=x)\times P(Y=y)$

2. Épreuves et lois de Bernoulli

2.1. Définition

Une épreuve de Bernoulli de paramètre p ($0<p<1$) est une épreuve aléatoire admettant exactement 2 issues.

- l'une appelée « Succès » est notée S et $P(S)=p$
- l'autre appelée « échec » est notée $\overline{S}$ et $P(\overline{S})=q=1-p$

2.2. Lois de Bernoulli

On considère la variable aléatoire X telle que : $X(\overline{S})=0$ et $X(S)=1$

k	0	1
$P(X=k)$	$1-p$	p

Espérance mathématique :

$E(X)=0\times(1-p)+1\times p=p$

$\boxed{E(X)=p}$

Variance :

$V(X)=(0-p)^2(1-p)+(1-p)^2\times p$

$V(X)=p(1-p)[p+(1-p)]$

$V(X)=p(1-p)=pq$

$\boxed{V(X)=pq=p(1-p)}$

On dit que X est **une variable de Bernoulli** de paramètre p (ou encore que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p).

2.3. Schéma de Bernoulli

On appelle **schéma de n épreuves de Bernoulli de paramètre p** (ou schéma de Bernoulli de paramètres n et p) toute expérience aléatoire constituant à répéter n fois dans les mêmes conditions, une même épreuve de Bernoulli de paramètre p (les épreuves sont indépendantes).

2.4. Simulation d'une loi de Bernoulli avec le classeur d'OpenOffice

a) Premier cas : $q=p=\frac{1}{2}$

Pour ce cas, la simulation dans le classeur d'OpenOffice est simple, dans la colonne A, on utilise la fonction :
ALEA.ENTRE.BORNE(0;1)

Ainsi, en A_1 , on écrit : =alea.entre.bornes(0;1) et on obtient 1 ou 0 avec une probabilité de $\frac{1}{2}$.

Si on veut 100 simulations, on étend la formule jusque A_{100}.
En C_1, on écrit : =somme(A_1:A_{100}). On obtient ainsi le nombre de succès en 100 simulations.
En C_3, on écrit : =C_1/100. On obtient ainsi la fréquence de succès pour les 100 simulations.
Attention, on n'obtient pas nécessairement la fréquence égale à 0,5.

b) Deuxième cas : $p=\frac{1}{5}$ et $q=\frac{4}{5}$.

Pour ce cas, la simulation dans le classeur d'OpenOffice nécessite l'utilisation de deux fonctions du classeur.
Dans la colonne A, on utilise la fonction : **ALEA.ENTRE.BORNE(1;5)**.

Ainsi, en A_1 , on écrit : =alea.entre.bornes(1;5).
Dans la colonne B, on utilise la fonction : **SI**.

Ainsi, en B_1 , on écrit : =si(A_1=1;1;0). On obtient 1 avec une probabilité $\frac{1}{5}$ et 0 avec une probabilité de $\frac{4}{5}$.
Si on veut 500 simulations, on étend les formules jusque A_{500} et B_{500}.

En D_1, on écrit : =somme(B_1:B_{500}). On obtient ainsi le nombre de succès en 500 simulations.

En D_3, on écrit : =D_1/500. On obtient ainsi la fréquence de succès pour les 500 simulations.

c) Troisième cas : $p=\frac{11}{23}$ et $q=\frac{12}{23}$.

Dans la colonne A, on utilise la fonction : **ALEA.ENTRE.BORNE(1;23)**.

Ainsi, en A_1 , on écrit : =alea.entre.bornes(1;23).
Dans la colonne B, on utilise la fonction : **SI**.

Ainsi, en B_1 , on écrit : =si(A_1<12;1;0). On obtient 1 avec une probabilité $\frac{11}{23}$ et 0 avec une probabilité de $\frac{12}{23}$.
Si on veut 200 simulations, on étend les formules jusque A_{200} et B_{200}.

En D_1, on écrit : =somme(B_1:B_{200}). On obtient ainsi le nombre de succès en 200 simulations.

En D_3, on écrit : =D_1/200. On obtient ainsi la fréquence de succès pour les 200 simulations.

d) Quatrième cas : $p=0{,}14$ et $q=0{,}86$.

$0{,}14=\frac{14}{100}$ et $0{,}86=\frac{86}{100}$.

Dans la colonne A, on utilise la fonction : **ALEA.ENTRE.BORNE(1;100)**.

Ainsi, en A_1 , on écrit : =alea.entre.bornes(1;100).
Dans la colonne B, on utilise la fonction : **SI**.

Ainsi, en B_1 , on écrit : =si(A_1<15;1;0). On obtient 1 avec une probabilité $\frac{14}{100}=0{,}14$ et 0 avec une probabilité de $\frac{86}{100}=0{,}86$.
Si on veut 400 simulations, on étend les formules jusque A_{400} et B_{400}.

En D_1, on écrit : =somme(B_1:B_{400}). On obtient ainsi le nombre de succès en 400 simulations.

En D_3, on écrit : =D_1/400. On obtient ainsi la fréquence de succès pour les 400 simulations.

3. Loi binomiale

3.1. Remarque

Dans un schéma de n épreuves de Bernoulli de paramètres p, un résultat (une éventualité) est une n-liste (avec répétition) d'un ensemble de 2 éléments : $\{S\,;\,\overline{S}\,\}$.

Exemples : pour $n=5$

- $(S;\overline{S};S;S;\overline{S})$

La probabilité de ce résultat est $p\times(1-p)\times p\times p\times(1-p)=p^3(1-p)^2$

- $(\overline{S};S;S;S;\overline{S})$
  La probabilité de ce résultat est $(1-p)\times p\times p\times p\times(1-p)=p^3(1-p)^2$

On considère la variable aléatoire Y associant chaque résultat le nombre de succès.
$Y=\{0;1;2;\ldots;n\}$.
k est un entier naturel compris entre 0 et n.
Pour k=0 le résultat est n échecs.
$P(Y=0)=(1-p)^n$
Pour k=n le résultat est n succès.
$P(Y=n)=p^n$
Pour 0<k<n il faut k succès et (n-k) échecs, il faut aussi placer les k succès parmi les n épreuves, il y a $\binom{n}{k}$ possibilités.

$$P(Y=k)=\binom{n}{k}p^k(n-p)^{n-k}$$

3.2. Loi binomiale

La loi de probabilité de Y est **la loi binomiale** de paramètres n (nombres d'épreuves répétées) et p (probabilité de succès).

Pour tout entiers naturel k compris entre 0 et n : $\boxed{P(Y=k)=\binom{n}{k}p^k(n-p)^{n-k}}$

3.3. Espérance et variance

On admet que :

$\boxed{E(Y)=np}$ et $\boxed{V(Y)=np(1-p)}$

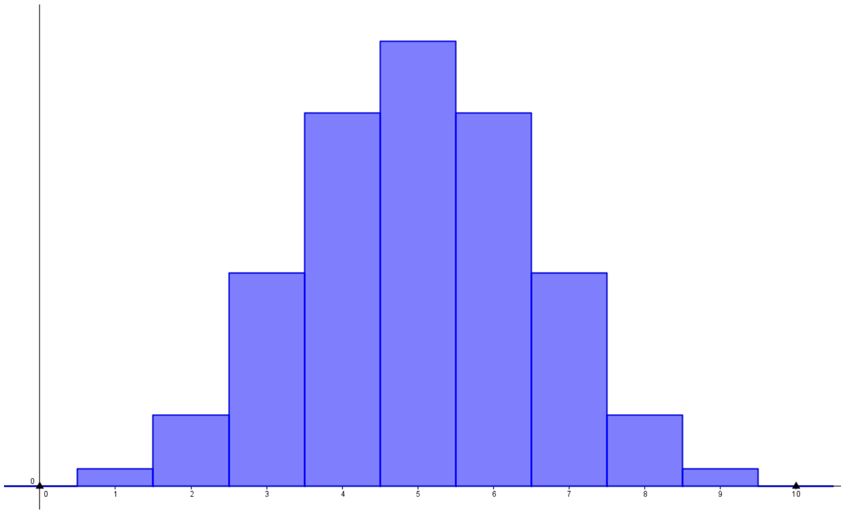
3.4. Exemples

En utilisant le logiciel géogébra :

a) $n=10$ $p=0{,}5$

On donne les résultats avec 5 décimales.

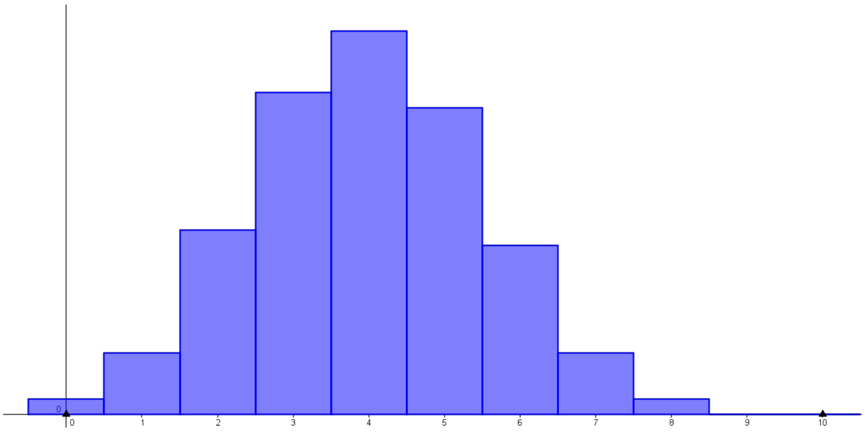
k	P(Y =k)
0	0.00098
1	0.00977
2	0.04395
3	0.11719
4	0.20508
5	0.24508
6	0.20508
7	0.11719
8	0.04395
9	0.00977
10	0.00098



b) $n=10$ $p=0,4$

On donne les résultats avec 5 décimales.

k	P(Y =k)
0	0.00605
1	0.04031
2	0.12093
3	0.21499
4	0.25082
5	0.20066
6	0.11148
7	0.04247
8	0.01062
9	0.00157
10	0.00010



c) $n=6$ $\qquad p=0{,}3$

On donne les résultats avec 5 décimales.

k	P(Y =k)
0	0.11765
1	0.30253
2	0.32414
3	0.18522
4	0.05954
5	0.01021
6	0.00073