Exercice

Des robots se trouvent au centre de gravité O d'un triangle de sommets S, I et X. Chacun se déplace en trois étapes successives de la manière suivante :
– à chaque étape, il passe par l'un des trois sommets S, I et X puis il rejoint le point O ;
– les robots sont programmés de telle sorte que, lors d'une étape, la probabilité de passer par le sommet S est égale à celle de passer par le sommet X et la probabilité de passer par le sommet S est le double de celle de passer par le sommet I ;
– les différentes étapes sont indépendantes les unes des autres ;
– on ne tient pas compte des passages par O.

Partie A **Un seul robot**

Un seul robot se trouve au point O.

1. Démontrer qu'à chaque étape, la probabilité que le robot passe par le sommet I est égale à $\frac{1}{5}$.

2. On note E l'événement : « au cours des trois étapes, le robot passe successivement par les 3 sommets S, I et X dans cet ordre ».

Démontrer que la probabilité de E est égale à $\frac{4}{125}$.

3. On note F l'événement : « au cours des trois étapes, le robot passe exactement par les 3 sommets S, I et X dans un ordre quelconque ».
Déterminer la probabilité de F.

Partie B **Plusieurs robots**

Des robots se trouvent au point O, leurs déplacements étant indépendants les uns des autres.
Quel nombre minimal n de robots doit-il y avoir pour que la probabilité de l'événement : « au moins l'un des robots passe successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre » soit supérieure ou égale à 0,99 ?

Correction :

Partie A **Un seul robot**

1.
$P(S)=P(X)=2P(I)$
$P(S)+P(X)+P(I)=1$
$2P(I)+2P(I)+P(I)=1$
$5P(I)=1$
$\boxed{P(I)=\frac{1}{5}}$ et $\boxed{P(S)=P(X)=\frac{2}{5}}$

La probabilité que le robot passe par le sommet I est égale à $\boxed{\frac{1}{5}}$.

2. Les 3 étapes sont indépendantes.
$\boxed{P(E)=P(S)\times P(I)\times P(X)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{125}}$
La probabilité de E est égale à $\boxed{\frac{4}{125}}$.

3.Quelque soit l'ordre des lettres la probabilité pour passer par les 3 sommets est $\frac{4}{125}$.
Il y a $3!=6$ permutations de (S;I;X)
Donc, $\boxed{P(F)=6\times\frac{4}{125}=\frac{24}{125}}$.
La probabilité de F est égale à $\boxed{\frac{24}{125}}$.

Partie B **Plusieurs robots**

On considère l'épreuve de Bernoulli pour un robot :
S : le robot passe successivement par les sommets : S ; I et X.
$\bar{S}$: le robot ne passe pas successivement par les sommets.
$\boxed{P(S)=\frac{4}{125}}$ $\boxed{P(\bar{S})=\frac{121}{125}}$
Les déplacements des n robots sont indépendants les uns des autres.
On obtient un schéma de Bernoulli de n épreuves de paramètre $\boxed{\frac{4}{125}}$.
La loi de probabilité de la variable aléatoire Y égale au nombre de succès en n épreuves est la loi binomiale de paramètres $\boxed{n}$ et $\boxed{\frac{4}{125}}$.

On appelle H l'événement : « au moins l'un des robots passe successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre ».
$\bar{H}$: « aucun robot ne passe successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre ».

$P(\overline{H})=\left(\frac{121}{125}\right)^n$

$P(H)=1-P(\overline{H})$

$P(H)=1-\left(\frac{121}{125}\right)^n$

$P(H)\geqslant 0{,}99$

$\Leftrightarrow\ 1-\left(\frac{121}{125}\right)^n\geqslant 0{,}99$

$\Leftrightarrow\ \ln\left(\frac{121}{1025}\right)<0$

$\Leftrightarrow\ \left(\frac{121}{125}\right)^n\leqslant 0{,}01$

$\Leftrightarrow\ \ln\left(\frac{121}{125}\right)^n\leqslant \ln 0{,}01$

$\Leftrightarrow\ n\ln\left(\frac{121}{125}\right)\leqslant \ln 0{,}01$ Or, $\ln\left(\frac{121}{1025}\right)<0$

$\boxed{n\geqslant\frac{\ln 0{,}01}{\ln\left(\frac{121}{125}\right)}\approx 141{,}6}$

Le nombre minimal de robots est 142.