Exercice

On considère un questionnaire comportant cinq questions.
Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites (A, B et C), une seule d'entre elles étant exacte.
Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres.
Par exemple, le mot « BBAAC » signifie que le candidat a répondu B aux première et deuxième questions, A aux troisième et quatrième questions et C à la cinquième question.
1. a. Combien y-a-t-il de mots-réponses possible à ce questionnaire ?
b. On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.
Calculer la probabilité des événements suivants :
E : « le candidat a exactement une réponse exacte ».
F : « le candidat n'a aucune réponse exacte ».
G : « le mot-réponse du candidat est un palindrome » (On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, « B ACAB » est un palindrome).
2. Un professeur décide de soumettre ce questionnaire à ses 28 élèves en leur demandant de répondre au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire. On désigne par X le nombre d'élèves dont le mot-réponse ne comporte aucune réponse exacte.
a. Justifier que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n=28$ et $p=\frac{32}{243}$.
b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'au plus un élève n'ait fourni que des réponses fausses.

Correction :

1. a. Une éventualité est une 5-liste d'éléments d'un ensemble de 3 éléments {A;B;C}.
card Ω $=3^5=243$

b. On considère l'épreuve de Bernoulli : répondre à une question. Le candidat répond au hasard donc la loi est équirépartie.
Il y a 1 seule bonne réponse parmi les 3 propositions.

S : le candidat donne la bonne réponse : $\boxed{P(S)=\frac{1}{3}}$.

$\overline{S}$: le candidat donne une mauvaise réponse : $\boxed{P(\overline{S})=\frac{2}{3}}$.

Le candidat répond au hasard aux 5 questions donc les questions sont indépendantes.

On obtient un schéma de Bernoulli de 5 épreuves de paramètre : $\boxed{p=\frac{1}{3}}$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire Y égale au nombre de bonnes réponses parmi les 5 questions est la loi binomiale de paramètres $\boxed{5}$ et $\boxed{\frac{1}{3}}$.

$$\boxed{P(E)=P(Y=1)=\binom{5}{1}\times\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\left(\frac{2}{3}\right)^{5-1}=5\times\frac{16}{243}=\frac{80}{243}}$$

$$\boxed{P(F)=P(Y=0)=\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}}$$

Pour un palindrome, les premières et cinquièmes lettres sont identiques, les deuxièmes et quatrièmes sont identiques. On peut donc choisir arbitrairement les 3 premières lettres.
Card G$=3^3=27$

$$\boxed{P(G)=\frac{27}{243}=\frac{1}{9}}$$

2. a. On considère l'épreuve de Bernoulli pour un élève:

S : l'élève donne aucune bonne réponse : $\boxed{P(S)=\frac{32}{243}}$

$\overline{S}$: l'élève donne au moins une bonne réponse : $\boxed{P(\overline{S})=\frac{211}{243}}$

Les réponses d'un élève sont indépendantes les unes des autres.

On obtient un schéma de Bernoulli de 28 épreuves de paramètre $\boxed{\frac{32}{243}}$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de succès en 28 épreuves est la loi binomiale de paramètres $\boxed{28}$ et $\boxed{\frac{38}{243}}$.

b. $P=P(X=0)+P(X=1)$

Or, $P(X=0)=\binom{28}{0}\times\left(\frac{211}{243}\right)^{28}\approx 0{,}02$ et $P(X=1)=\binom{28}{1}\times\left(\frac{32}{243}\right)\times\left(\frac{211}{243}\right)^{27}\approx 0{,}08$.

$P\approx 0{,}10$

La probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'au plus un élève n'ait fourni que des réponses fausses est environ **0,10**.