Lois de probabilité continues

1. Notion de loi à densité de probabilité

1.1. Introduction

Nous n'avons étudié que des exemples de variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs.

Mais il arrive aussi que les issues d'une expérience ou les valeurs prises par une variable aléatoire puissent être n'importe quel nombre d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ (par exemple la durée de communication téléphonique).

Dans ce cas, il n'est plus question de définir une loi de probabilité sur I en se donnant la probabilité de chaque élément de I (cette probabilité serait alors nulle), mais on déterminera la probabilité d'un intervalle contenu dans I.

1.2. Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

On nomme **densité de probabilité sur I** toute fonction f définie sur I vérifiant les 3 conditions suivantes :

- f est continue sur I.
- f est positive sur I (pour tout réel x de I : $f(x)\geqslant 0$)
- L'aire de la partie du plan située sous la courbe (dans un repère orthogonal) représentative de f et au dessous de $(x'x)$ sur I est égal à 1 (unité d'aire).

1.3. Exemples

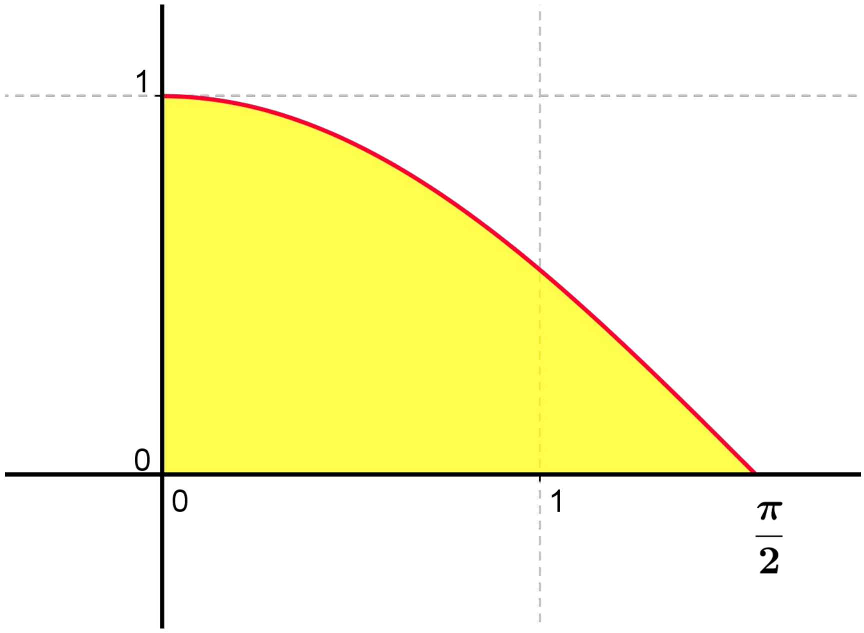
a) cos : $\mathbb{R}$ $\to$[-1;1]

$x \longmapsto \cos x$

On considère l'intervalle $I=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

- cos est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
- pour tout x appartenant à $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x\geqslant 0$.
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}x = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1$

cos est une densité de probabilité sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.



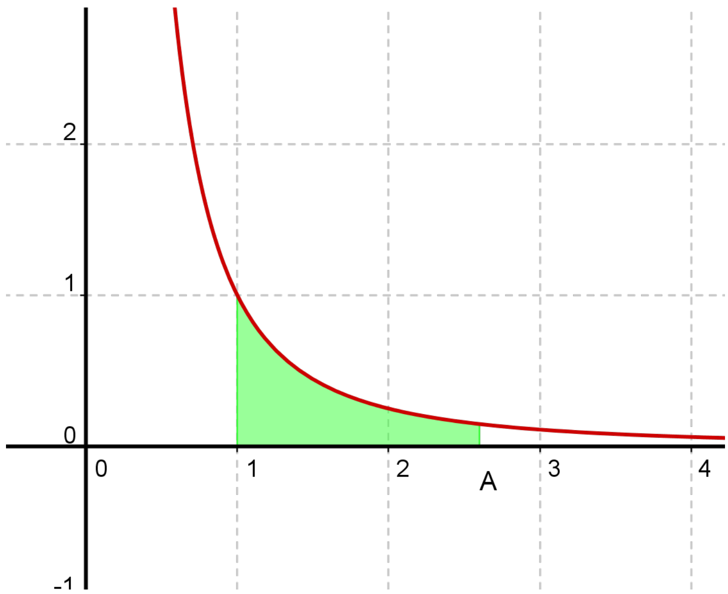
b) $f\ :\ ]0;+\infty[\ \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x)=\frac{1}{x^2}$$

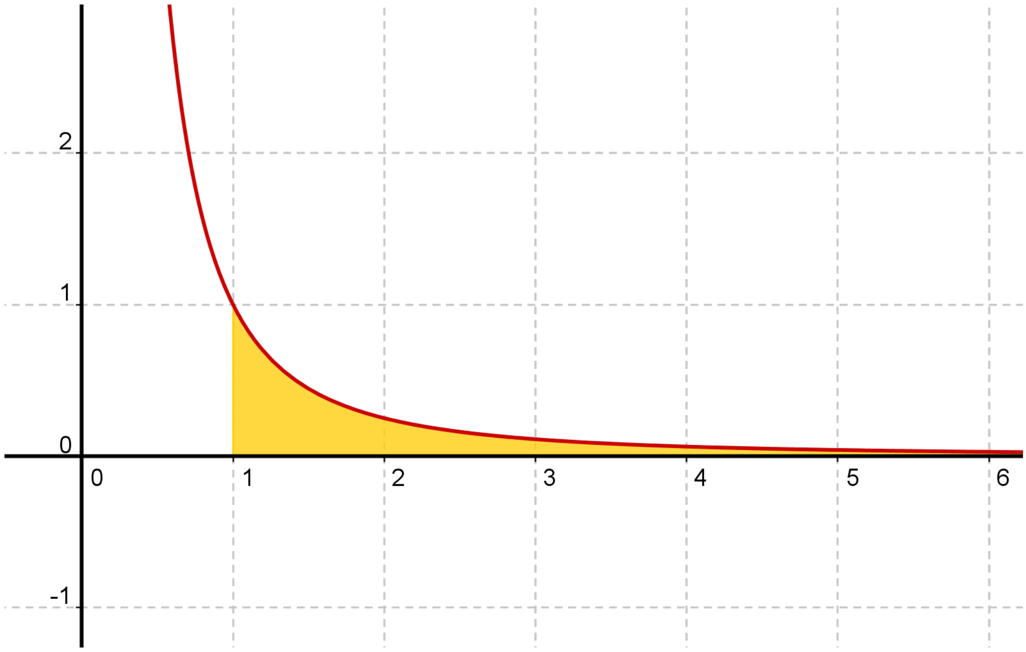
On considère l'intervalle $I=[1;+\infty[$

- f est continue sur $[1;+\infty[$.
- pour tout réel supérieur ou égal à 1, $f(x)\geqslant 0$.
- pour tout réel A>1, l'aire en unité d'aire de la partie du plan comprise entre la courbe et (xx') sur [1;A]

est $\int_1^A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^A \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^A = -\frac{1}{A}+1 = 1-\frac{1}{A}$



La limite lorsque A tend vers $+\infty$ de $\int_1^A f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire en unité d'aire de la partie du plan comprise entre la courbe et l'axe $(x'x)$ sur $[1;+\infty[$. Or, $\lim_{A \to +\infty} 1-\frac{1}{A}=1$.



donc f est une densité de probabilité sur $[1;+\infty[$.

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$

On considère l'intervalle I=$\mathbb{R}$.

- f est continue sur $[1;+\infty[$.
- Pour tout réel x , $f(x) \geqslant 0$
- Pour tout réel A>0 , l'aire en U.A de la partie de plan comprise entre la courbe et l'axe $(x'x)$ sur [0;A]

est $\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^A \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\right]_0^A = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-A}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{0} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-A}$.

La limite lorsque A tend vers $+\infty$ de $\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire en unité d'aire de la partie du plan comprise entre la courbe et l'axe $(x'x)$ sur $[0;+\infty[$.

Or, $\lim_{A \to +\infty} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-A}=\frac{1}{2}$

Pour tout réel B<0 , l'aire en U.A de la partie de plan comprise entre la courbe et l'axe $(x'x)$ sur [B;0] est

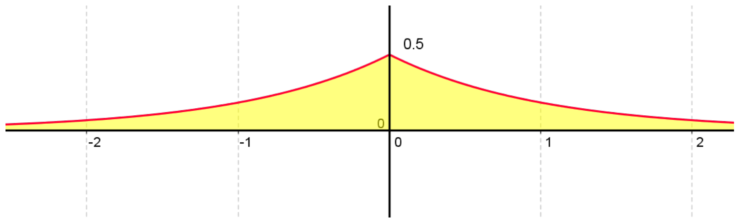
$$\int_B^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_B^0 \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\right]_B^0 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{0} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{B} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{B}.$$

La limite lorsque B tend vers $-\infty$ de $\int_B^0 f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire en unité d'aire de la partie du plan comprise entre la courbe et l'axe $(x'x)$ sur $]-\infty;0]$.

Or, $\lim\limits_{B\to-\infty} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{B}=\frac{1}{2}$

Conclusion :

L'aire en U.A de la partie du plan comprise entre la courbe et l'axe $(x'x)$ sur $\mathbb{R}$ est égale à $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.



f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

2. Lois de probabilité continues

2.1. Définition

On définit la loi de probabilité P de densité f sur l'intervalle I en associant à tout intervalle $[\alpha;\beta]$ inclus dans I le réel $P([\alpha;\beta])=\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$.

On dit que P est **une loi de probabilité à densité sur I** ou une loi continue sur I.

$P([\alpha;\beta])$ se lit « **probabilité de l'intervalle** $[\alpha;\beta]$ ».

Remarque :

Si $I=[0;+\infty[$ et $\alpha>0$ alors $P([\alpha;+\infty[)=1-P([0;\alpha])$.

2.2. Conditionnement

Soit P une loi de probabilité sur un intervalle I ; J et K sont deux intervalles inclus dans I et P(K)≠0 alors la probabilité conditionnelle de J sachant K est égale à :

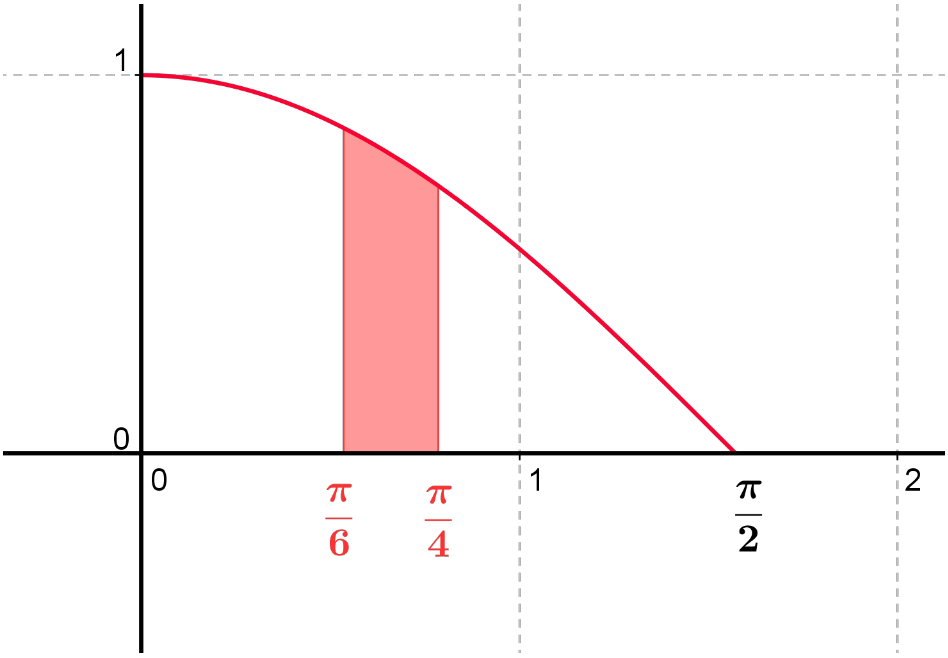
$$P_K(J)=\frac{P(J\cap K)}{P(K)}.$$

2.3. Exemples

a) cos est une densité de probabilité sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

$$P([\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}])=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,\mathrm{d}x=[\sin x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\sin\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\approx 0{,}21\ .$$

$P\left(\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]\right)$ est l'aire en unité d'aire de la partie du plan colorée en rouge sur le dessin.

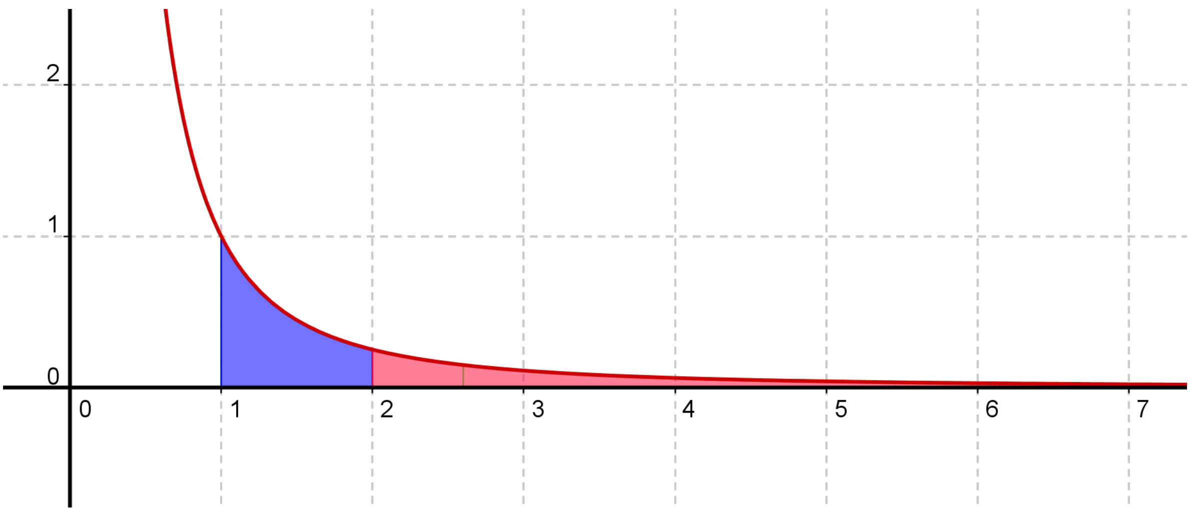


b) f telle que $f(x)=\frac{1}{x^2}$ est une densité de probabilité sur $[1\,;+\infty[$.

$$P([2\,;+\infty[)=1-P([1\,;2])=1-\int_1^2\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=1-\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2=1-\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}$$

$P([1\,;2])$ est l'aire en unité d'aire de la partie du plan colorée en bleu sur le dessin.

$P([2\,;+\infty[)$ est l'aire en unité d'aire de la partie du plan colorée en rouge sur le dessin.



2.3. Remarques

Dans la suite nous allons étudier des lois de probabilité particulière ayant une utilisation importante en statistique. Par exemples : la loi de durée de vie sans vieillissement ou la loi normale pour laquelle on ne déterminera pas de primitive de la fonction f mais nous utiliserons la calculatrice ou le logiciel géogébra pour obtenir les valeurs numériques.

3. La loi uniforme

3.1. Introduction

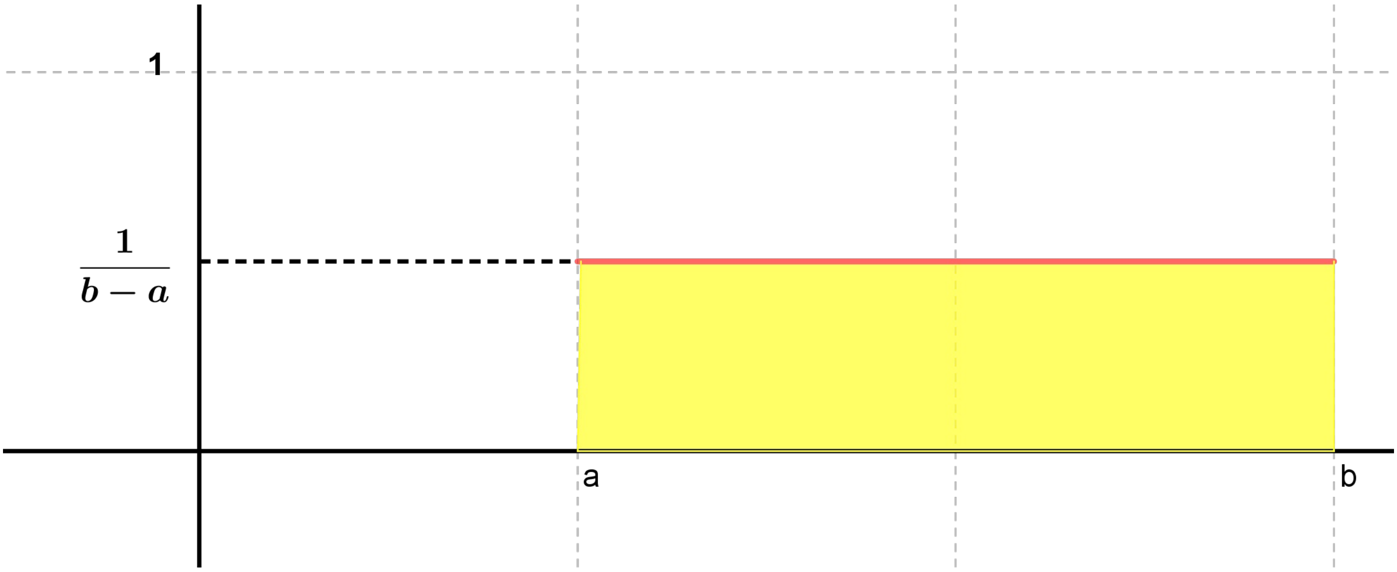
I est un intervalle borné. I=[a;b] a<b.

Le choix au hasard (le tirage au sort) d'un élément x de l'intervalle I=[a;b] de $\mathbb{R}$ se modélise par la loi continue sur I dont la densité est constante.

$f(x)=k\geqslant 0$.

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b k\,\mathrm{d}x = [kx]_a^b = k(b-a) = 1$ (car f est une densité de probabilité).

Donc, $k=\frac{1}{b-a}$ et $f(x)=\frac{1}{b-a}$



3.2. Définition

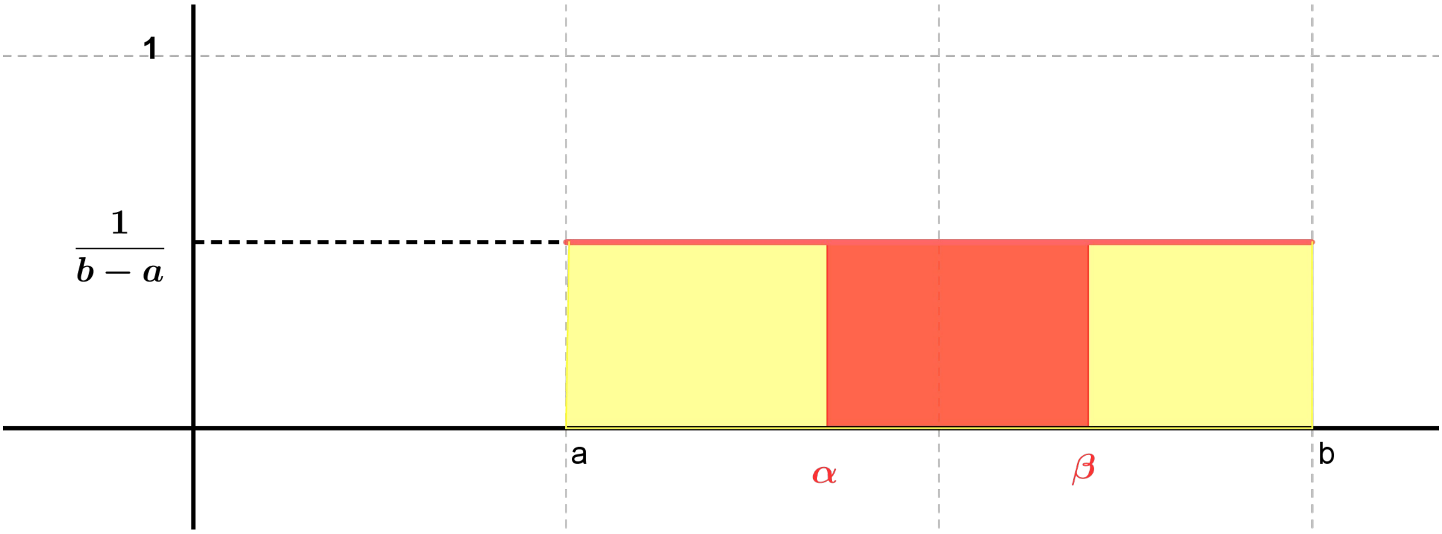
On nomme **loi uniforme** sur l'intervalle [a;b], la loi de probabilité continue sur I dont la densité f est la fonction constante égale à $\frac{1}{b-a}$.

3.3. Probabilité d'un intervalle

Pour cette loi, la probabilité de l'intervalle $J=[\alpha;\beta]$ contenu dans I=[a;b] égale à :

$$P(J)=P([\alpha;\beta])=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x}{b-a}\right]_{\alpha}^{b}$$

$$P(J)=P([\alpha;\beta])=\frac{\beta-\alpha}{b-a}=\frac{longueur\ de\ J}{longueur\ de\ I}$$



La probabilité de $[\alpha;\beta]$ est l'aire en U.A de la partie de plan colorée en rouge.

3.4. Exemple

Le choix au hasard d'un nombre réel dans l'intervalle I=[-1;4] se modélise par la loi uniforme P sur I de densité constante : $\frac{1}{5}$.

$P(2)=0$

$P([0;3])=\frac{3-0}{4+1}=\frac{3}{5}=0{,}6$

$P([-1;\pi])=\frac{\pi+1}{5}\approx 0{,}83$

3.5. Espérance mathématique

a) <u>Remarque :</u>

Si on considère une variable aléatoire X prenant les n valeurs : $x_1;x_2;\ldots;x_n$ et si la loi est équirépartie ou uniforme, c'est à dire $P(x_1)=P(x_2)=\ldots=P(x_n)=\frac{1}{n}$.

$$E(X)=\sum_{1}^{n}x_iP(x_i)=x_1P(x_1)+x_2P(x_2)+\ldots+x_nP(x_n)=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

L'espérance mathématique est donc égale au produit de la probabilité de chaque valeur par la somme des valeurs.

b) Pour une loi de probabilité uniforme sur l'intervalle I=[a;b], les valeurs sont tous les réels x appartenant à I, on ne considère pas leur somme mais $\int_a^b x\,dx$ (au lieu de $\sum_{i=1}^{n} x_i$).

$$E=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx=\int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx$$

<u>Définition :</u>

On nomme **espérance mathématique de la loi continue uniforme** sur I=[a;b] le nombre réel : $E=\int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx$

<u>Remarque :</u>

On peut utiliser une autre lettre pour la variable d'intégration, par exemple : t.

<u>Calcul de l'espérance mathématique :</u>

$$E=\int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx=\frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b=\frac{1}{b-a}\times\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)=\frac{1}{b-a}\times\frac{(b-a)(b+a)}{2}$$

$$\boxed{E=\frac{a+b}{2}}$$

3.5. Variance

a) <u>Définition</u>

<u>Définition :</u>

La **variance pour la loi continue uniforme** sur I=[a;b] est le nombre réel :

$$V=\int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx-E^2$$

b) <u>Calcul :</u>

$$V=\int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx-E^2$$

$$V=\int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$V=\frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$V=\frac{1}{b-a}\times\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right)-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$V=\frac{1}{b-a}\times\frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3}-\frac{a^2+b^2+2ab}{4}$$

$$V=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{a^2+b^2+2ab}{4}$$

$$V=\frac{4b^2+4ab+4a^2-3a^2-3b^2-6ab}{12}$$

$$V=\frac{a^2+b^2-2ab}{12}$$

$$\boxed{V=\frac{(a-b)^2}{12}}$$

3.6. Généralisation

Pour la loi à densité de probabilité f sur I=[a;b], **l'espérance mathématique** est : $\boxed{E=\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x}$ et **la variance** est : $\boxed{V=\int_a^b x^2 f(x)\,\mathrm{d}x-E^2}$

4. Durée de vie sans vieillissement

4.1. Désintégration radioactive

a) D'après des études expérimentales on émet les hypothèses (ou les conjectures) suivantes :

- La durée de vie d'un noyau est modélisée par une loi de probabilité P à densité continue f sur $[0;+\infty[$ (la désintégration radioactive est identique pour tous les noyaux).
- La désintégration radioactive d'un noyau est indépendant de la désintégration des autres.
- T est la variable aléatoire égale à la durée de vie d'un noyau (l'unité de temps est fixée, selon les cas, on aura : 1 an ou 1 jour ou 1s …)

  Si $t\in[0;+\infty[$, $P(T\leq t)=\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t=P([0;t])$

  La probabilité conditionnelle pour un noyau, ayant existé jusqu'à la date *t*, de se désintégrer entre les dates *t* et *t*+*r* (*r*>0) ne dépend pas de la droite *t*, c'est à dire :

  $P_{(T\geqslant t)}(T\leqslant t+r)=\frac{P(t\leqslant T\leqslant t+r)}{P(T\geqslant t)}$ =constante (ne dépend pas de *t* mais que de *r*)

  Donc, la loi conditionnelle ne dépend pas de « l'âge » du noyau, c'est pour cela que la loi de probabilité se nomme **loi de durée de vie sans vieillissement**.

b) F est la primitive de f sur $[0;+\infty[$ telle que F(0)=0, c'est à dire pour tout $t\in[0;+\infty[$:

$$F(t)=\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}t=P([0;t])=P(T\leqslant t)$$

$a\in[0;+\infty[$ et $b\in[0;+\infty[$ avec a<b

$$P([a;b])=P(a\leq T\leq b)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

$$P([a;+\infty[)=P(a\leqslant T)=1-P([0;a])=1-P(T\leqslant a)=1-F(a)$$

c) $P_{(T\geqslant t)}(T\leqslant t+r)=\dfrac{P(t\leqslant T\leqslant t+r)}{P(T\geqslant t)}$ =constante

$=\dfrac{F(t+r)-F(t)}{1-F(t)}=\dfrac{F(0+r)-F(0)}{1-F(0)}$ (pour t=0)

Or, F(0)=0

$=F(r)$

Donc, $\boxed{F(t+r)-F(t)=F(r)(1-F(t))}$

d) On pose $G(t)=1-F(t)$

$$G(t)=1-\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x=1-P(T\leqslant t)=P(t\leqslant T)$$

$G(0)=1-F(0)$ donc $G(0)=1$

t est un réel strictement positif.

$G(t+r)=1-F(t+r)=1-[F(t)+F(r)\times(1-F(t))]$

$G(t+r)=1-F(t)-F(r)\times(1-F(t))$

$G(t+r)=G(t)\times[1-F(r)]$

$G(t+r)=G(t)\times G(r)$

Pour tous t et r : $G(t+r)=G(t)\times G(r)$

$G(t)=1-F(t)$ donc G est dérivable sur $[0;+\infty[$.

$G'(t)=-F'(t)=-f(t)$

Pour r fixé :

$[G(t+r)]'=G'(t+r)\times 1$

$[G(t)\times G(r)]'=G'(t)\times G(r)$

Donc, $G'(t+r)=G'(t)\times G(r)$

Or, $G(t+r)=G(t)\times G(r)$

Donc, $\dfrac{G'(t+r)}{G(t+r)}=\dfrac{G'(t)}{G(t)}=\dfrac{G'(0)}{G(0)}=G'(0)$

On a donc,

$G'(t)=G'(0)\times G(t)$

G est la solution de l'équation différentielle : $y'=G'(0)y$ telle que $G(0)=1$.

On pose $\alpha=G'(0)$

Donc, $G(t)=Ke^{\alpha t}$

$G(0)=K=1$

Donc, $G(t)=\mathrm{e}^{\alpha t}$

Nous avons vu que $G'(t)=-F'(t)=-f(t)$

f est une densité de probabilité donc $f(t)\geqslant 0$ et $G'(0)=\alpha\leqslant 0$

G n'est pas une fonction constante pour $\alpha<0$

$G'(t)=\alpha\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ et $G'(t)=-f(t)$

Donc $f(t)=-\alpha\,e^{\alpha t}$

On pose $\lambda=-\alpha>0$

$f(t)=\lambda\,e^{-\lambda t}$

Donc, la loi de densité de probabilité est une fonction exponentielle

$$\boxed{P(T\leq t)=\int_0^t \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}\,t}$$

λ est une constante que l'on nomme :

« **constante de désintégration par unité de temps** ».

pour l'uranium 238 : $\lambda=1{,}54\times 10^{-10}$

unité de temps : 1an

pour l'iode 131 : $\lambda=8{,}7\times 10^{-2}$

unité de temps : 1jour

pour le polonium 214 : $\lambda=1165$

unité de temps : 1s

4.2. Durée de vie

Pour la durée de vie d'un insecte ou la durée de bon fonctionnement d'une machine à laver ou d'un composant électronique, on utilise la variable aléatoire T continue qui mesure la durée de vie ou encore le temps du bon fonctionnement.

L'origine des temps est $t=0$, date de la naissance ou date de la mise en route.

La variable aléatoire T est une variable continue qui prend ses valeurs sur $[0;+\infty[$.

En général, on admet que la loi T est une loi de durée de vie sans vieillissement.

$F(t)=P(T \leqslant t)$ (pour $t \in [0;+\infty[$) est **la probabilité de défaillance**.

F(t) est la probabilité que l'appareil tombe en panne (ou l'insecte cesse de vivre) avant la date t.

$G(t)=1-F(t)=P(T>t)$

On obtient $\boxed{F(t)=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}}$

λ se nomme **taux de défaillance.**

5. Loi exponentielle

5.1. Introduction

λ est une constante réelle strictement positive fixée.

$t \in I=[0;+\infty[\qquad f(t)=\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$

f est continue sur I.

f est positive sur I.

$A>0$ l'aire en U.A de la partie de plan située entre la courbe représentative de f et $(x'x)$ sur [0;A] est : $\int_0^A f(t)\mathrm{d}t$.

$$\int_0^A f(t)\mathrm{d}t=\int_0^A \lambda \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\left[-e^{-\lambda t}\right]_0^A=-e^{-\lambda A}+1=1-\mathrm{e}^{-\lambda A}$$

$\lim_{A\to+\infty} -\lambda A=-\infty$ donc $\lim_{A\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda A}=0$.

Donc, $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t=1$.

Donc l'aire en U.A de la partie du plan située entre la courbe représentative de f et $(x'x)$ sur $[0;+\infty[$ est égale à 1.

Conséquence :

f est une densité de probabilité sur $[0;+\infty[$.

Pour le dessin, on a choisi $\lambda=0{,}7$

5.2. Définition

λ est une constante réelle strictement positive fixée.

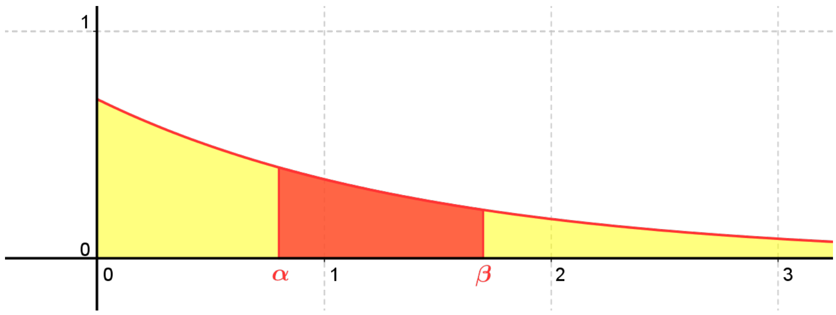
On nomme **loi exponentielle de paramètre** λ la loi continue admettant pour densité de probabilité sur $[0;+\infty[$ la fonction f définie par $\boxed{f(t)=\lambda e^{-\lambda t}}$.

5.3. Probabilité d'un intervalle

Si $\alpha\in[0;+\infty[$ et $\beta\in[0;+\infty[$ alors :

$$P([\alpha;\beta])=\int_{\alpha}^{\beta}\lambda e^{-\lambda t}dt=\left[-e^{-\lambda t}\right]_{\alpha}^{\beta}=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}$$

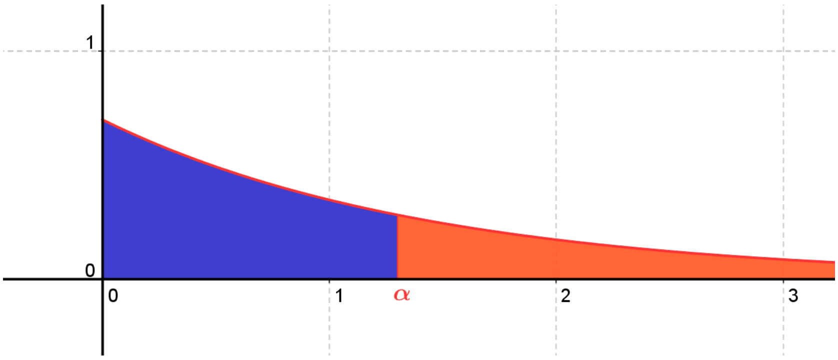
$P([\alpha;\beta])$ est l'aire en U.A de la partie de plan située entre la courbe représentative de f et $(x'x)$ sur $[\alpha;\beta]$ (cette partie de plan est colorée en rouge sur le dessin).



Si $\alpha\in[0;+\infty[$ alors :

$$P([\alpha;+\infty[)=1-\int_{0}^{\alpha}\lambda e^{-\lambda t}dt=1-\left[-e^{-\lambda t}\right]_{0}^{\alpha}=1-(e^{-\lambda\alpha}+1)=e^{-\lambda\alpha}$$

$P([\alpha;+\infty[)$ est l'aire en U.A de la partie de plan située entre la courbe représentative de f et $(x'x)$ sur $[\alpha;+\infty[$ (cette partie de plan est colorée en rouge sur le dessin).



5.4. Remarque

La loi exponentielle de paramètre λ est **une loi de durée de vieillissement** c'est à dire que $P_{[t;+\infty[}([t+s;+\infty[)$ ne dépend pas de t.

$P_{[t;+\infty[}([t+s;+\infty[)=\dfrac{P([t+s;+\infty[)}{P([t;+\infty[)}=\dfrac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}}=e^{-\lambda s}=P([s;+\infty[)$ ne dépend pas de t.

5.5. Espérance mathématique

Pour tout réel $A>0$, on considère l'intégrale $\int_0^A t\, f(t)\,dt$

$$\int_0^A t\, f(t)\,dt=\int_0^A t(\lambda e^{-\lambda t})\,dt$$

Pour calculer cette intégrale, on effectue une intégration par parties :

$u(t)=t \qquad u'(t)=1$

$v'(t)=\lambda e^{-\lambda t} \qquad v(t)=-e^{-\lambda t}$

$u;v;u';v'$ sont continues sur $[0;+\infty[$

$$\int_0^A t\, f(t)\,dt=\int_0^A t(\lambda e^{-\lambda t})\,dt=\left[-te^{-\lambda t}\right]_0^A+\int_0^A e^{-\lambda t}\,dt$$

$$\int_0^A t\, f(t)\,dt=\int_0^A t(\lambda e^{-\lambda t})\,dt=-Ae^{-\lambda A}+\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_0^A$$

$$\int_0^A t\, f(t)\,dt=\int_0^A t(\lambda e^{-\lambda t})\,dt=-Ae^{-\lambda A}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda A}+\frac{1}{\lambda}$$

$$\lim_{A\to+\infty} e^{-\lambda A}=0$$

Donc, $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A t\, f(t)\,dt=\dfrac{1}{\lambda}$

L'espérance mathématique de la loi exponentielle de paramètre λ est $\dfrac{1}{\lambda}$.

5.6. Variance

$\int_0^A t^2(\lambda e^{-\lambda t})\,dt=\left[-t^2e^{-\lambda t}\right]_0^A+\left[-2te^{-\lambda t}\right]_0^A+\frac{2}{\lambda}\left[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^A$. En effectuant 2 intégrations par parties successives, on peut vérifier que :

$$\int_0^A t^2(\lambda e^{-\lambda t})\,dt = \left[-t^2 e^{-\lambda t}\right]_0^A + \left[-2te^{-\lambda t}\right]_0^A + \frac{2}{\lambda}\int_0^A e^{-\lambda t}\,dt_0$$

$$\int_0^A t^2(\lambda e^{-\lambda t})\,dt = \left[-t^2 e^{-\lambda t}\right]_0^A + \left[-2te^{-\lambda t}\right]_0^A + \frac{2}{\lambda}\left[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^A$$

$$\int_0^A t^2(\lambda e^{-\lambda t})\,dt = -A^2 e^{-\lambda A} - 2Ae^{-\lambda A} - \frac{2}{\lambda^2}e^{-\lambda A} + \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A t^2(\lambda e^{-\lambda t})\,dt = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$E^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Donc, $V = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$

La variance de la loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda^2}$.

L'écart type est donc $\frac{1}{\lambda}$.