Exercice

On admet que la durée de vie (exprimée en années) d'un certain type de capteur de lumière peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ strictement positif), c'est-à-dire que la probabilité que ce capteur tombe en panne avant l'année t (t positif) s'exprime par :

$$F(t)=p(X\leq t)=p([0\,;t])=\int_0^t \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

1. **Restitution organisée de connaissances**

Pré-requis :

a. $p_B(A)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$ (où A et B sont deux événements tels que p(B)$^4_4$0) ;

b. $p(\overline{A})=1-p(A)$ (où A est un événement) ;

c. $p([a\,;b])=F(b)-F(a)$ (où a et b sont des nombres réels positifs tels que $a\leqslant b$).

Démontrer que, pour tout nombre réel positif s , on a :

$$p_{[t\,;+\infty]}([t\,;t+s])=\frac{F(t+s)-F(t)}{1-F(t)}\ ,$$

et que $p_{[t\,;+\infty]}([t\,;t+s])$ est indépendant du nombre réel t .

Pour la suite de l'exercice, on prendra λ=0,2.

2. Démontrer que la probabilité que le capteur ne tombe pas en panne au cours des deux premières années est égale à $\mathrm{e}^{-0,4}$.

3. Sachant que le capteur n'est pas tombé en panne au cours des deux premières années, quelle est, arrondie au centième, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?

4. On considère un lot de 10 capteurs, fonctionnant de manière indépendante.

Dans cette question, les probabilités seront **arrondies à la sixième décimale**.

a. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait exactement deux capteurs qui ne tombent pas en panne au cours des deux premières années.

b. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un capteur qui ne tombe pas en panne au cours des deux premières années.

Correction :

1. **Restitution organisée de connaissances**

$p_{[t;+\infty]}([t;t+s])=\dfrac{p([t;t+s]\cap[t;+\infty[)}{p([t;+\infty[)}$

$p_{[t;+\infty]}([t;t+s])=\dfrac{p([t;t+s])}{p([t;+\infty[)}$

$p([t;t+s])=F(t+s)-F(t)$

$p([t;+\infty[)=1-F(t)$

Donc, $p_{[t;+\infty]}([t;t+s])=\dfrac{F(t+s)-F(t)}{1-F(t)}$

Or, $F(t)=\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=[-e^{-\lambda x}]_0^t=-\mathrm{e}^{-\lambda t}+1=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$

Donc, $F(t+s)=1-\mathrm{e}^{-\lambda(t+s)}$

$F(t+s)-F(t)=1-\mathrm{e}^{-\lambda(t+s)}-(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})$

$F(t+s)-F(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}-\mathrm{e}^{-\lambda(t+s)}$

$F(t+s)-F(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}(1-\mathrm{e}^{-\lambda s})$

$1-F(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}$

Donc, $p_{[t;+\infty]}([t;t+s])=\dfrac{F(t+s)-F(t)}{1-F(t)}=\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda t}(1-\mathrm{e}^{-\lambda s})}{\mathrm{e}^{-\lambda t}}=1-\mathrm{e}^{-\lambda s}=F(s)$

Donc, $p_{[t;+\infty]}([t;t+s])$ est **indépendant du nombre réel** t .

2. On nous demande de calculer $p([2;+\infty[)$.

$p([2;+\infty[)=1-p([0;2])$

$p([2;+\infty[)=1-\int_0^2 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=1-[-e^{-\lambda t}]_0^2=e^{-2\lambda}$

Or, λ=0,2

Donc, $\boxed{p([2;+\infty[)=\mathrm{e}^{-0,4}}$.

3. $P_{[2;+\infty[}([6;+\infty[)=\dfrac{p([6;+\infty[)}{p([2;+\infty[)}=\dfrac{1-p([0;6])}{1-p([0;2])}=\dfrac{\mathrm{e}^{-6\times 0,2}}{\mathrm{e}^{-2\times 0,2}}=\mathrm{e}^{-0,8}$

4. a. $P([2;+\infty[)=\mathrm{e}^{-0,4}$

On considère l'épreuve de Bernoulli pour 1 capteur :

Succès : S : le capteur ne tombe pas en panne au cours des deux premières années. $\boxed{p(S)=\mathrm{e}^{-0,4}}$

Les 10 capteurs fonctionnent de manière indépendante.

On obtient un schéma de Bernoulli de paramètre $\boxed{p(S)=\mathrm{e}^{-0,4}}$

La loi de probabilité de la variable aléatoire égale au nombre de succès en 10 épreuves est la loi binomiale de paramètres $\boxed{10}$ et $\boxed{p(S)=\mathrm{e}^{-0,4}}$.

Si k est un entier compris entre 0 et 10 alors $p(X=k)=\binom{10}{k}\times(\mathrm{e}^{-0,4})^k\times(1-e^{-0,4})^{10-k}$.

$$\boxed{p(X=2)=\binom{10}{2}\times(\mathrm{e}^{-0,4})^2\times(1-e^{-0,4})^8\approx 0,002822}$$

b. L'événement contraire est X=0.

$p(X=0)=(1-\mathrm{e}^{-0,4})^{10}\approx 0,000015$

$\boxed{1-p(X=0)\approx 0,999985}$